Skripta do matematiky k maturitě

IGMEN

Maturitní témata z matematiky

1) Výroková logika
2) Množiny - operace, intervaly
3) Algebraické výrazy - práce s mnohočleny, algebraické vzorce
4) Lomené výrazy
5) Mocniny a odmocniny
6) Lineární funkce, lineární rovnice
7) Lineární rovnice s parametrem, s absolutní hodnotou
8) Soustava lineárních rovnic
9) Lineární nerovnice, soustava lineárních nerovnic o jedné neznámé
10) Maticový počet, operace s maticemi, hodnost, determinant
11) Kvadratické funkce
12) Kvadratická rovnice - metody řešení
13) Kvadratické nerovnice
14) Iracionální rovnice
15) Shodná zobrazení - konstrukční úlohy
16) Podobná zobrazení - konstrukční úlohy
17) Pythagorova a Eukleidovy věty - konstrukční úlohy
18) Obvody a obsahy rovinných obrazců
19) Polohové a metrické vztahy základních geometrických útvarů v prostoru
20) Povrchy a objemy těles
21) Goniometrické funkce
22) Řešení pravoúhlého trojúhelníku
23) Úpravy výrazů s goniometrickou funkcí užitím vzorců
24) Goniometrické rovnice
25) Řešení obecného trojúhelníku
26) Komplexní číslo - pojem, algebraický tvar, operace
27) Komplexní číslo - goniometrický a exponencionální tvar, operace
28) Moivreova věta, binomické rovnice
29) Lineární lomená funkce
30) Mocninné funkce
31) Exponenciální funkce, exponencionální rovnice
32) Logaritmické funkce, logaritmus, vlastnosti
33) Logaritmické rovnice
34) Vektor, operace s vektory
35) Analytická geometrie - přímky v rovině a prostoru
36) Analytická geometrie - roviny
37) Analytická geometrie - vzájemná poloha přímky a roviny, dvou rovin
38) Analytická geometrie - vzájemná poloha dvou přímek v rovině a prostoru
39) Analytická geometrie - metrické úlohy metodou souřadnic
40) Analytická geometrie kuželoseček - kružnice
41) Analytická geometrie kuželoseček - elipsa
42) Analytická geometrie kuželoseček - hyperbola
43) Analytická geometrie kuželoseček - parabola
44) Analytická geometrie - vzájemná poloha kuželosečky a přímky
45) Limita a spojitost funkce
46) Derivace funkce
47) Fyzikální a geometrický význam derivace
48) Vyšetřování průběhu funkce
49) Aplikace extrémů funkcí v úlohách
50) Neurčitý integrál - metody integrace
51) Určitý integrál - užití
52) Posloupnost - vlastnosti, limita posloupnosti
53) Aritmetická posloupnost
54) Geometrická posloupnost
55) Nekonečná geometrická řada
56) Variace, permutace, kombinace
57) Kombinační číslo - vlastnosti, rovnice s kombinačními čísly
58) Pravděpodobnost
59) Statistika
60) Důkazy v matematice

1. Výroková logika

Výrok: ***Sdělení, o kterém má smysl říct, zda je či není pravdivé.***

Hypotéza: ***Výrok, u něhož jsme v daném okamžiku neurčili jednoznačně pravdivost. (Doměnka)***

pravdivý výrok → 1
nepravdivý výrok → 0

ZÁKLADNÍ LOGICKÉ SPOJKY:

$\neg$ negace (není pravda, že…)
$\wedge$ konjunkce (…a… | …a současně… | …a zároveň…)
$\vee$ disjunkce (…nebo…)
$\Rightarrow$ implikace (jestliže… pak… | když… pak… | je-li… pak…)
$\Leftrightarrow$ ekvivalence (…právě když… | …právě tehdy…)

Př.:
A: Dnes prší. B: Venku je bláto.

$\neg$A: Není pravda, že dnes prší.
$\neg$A: Dnes neprší.
$\neg$B: Není pravda, že je venku bláto.
$\neg$B: Venku není bláto.

A$\wedge$B: Dnes prší a venku je bláto.
A$\vee$B: Dnes prší nebo je venku bláto.
A$\Rightarrow$B: Jestliže prší pak je venku bláto.
A$\Leftrightarrow$B: Venku je bláto právě když prší.

Jednoduchý výrok: p; q

Složený výrok: $\neg p$; $p \wedge q$; $p \vee q$; $p \Rightarrow q$; $p \Leftrightarrow q$; $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

Výroková formule: ***Vzniká kombinací více logických operací (případně výroků). Operace u nich mají nadřazenost v tomto pořadí:*** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$***; pokud není jejich nadřazenost změněna závorkou.***

Tautologie: ***Výroková formule, která je vždy pravdivá.***

Kontradikce: ***Výroková formule, která je vždy nepravdivá.***

Tabulka pravdivostních hodnot a výrokových formulí základních složených výroků:

p	q	¬p	¬q	p∧q	p∨q	p⇒q	p⇔q
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Př.:

① (A ⇒ ¬B) ∧ (B ⇔ ¬A)

A	B	¬A	¬B	A ⇒ ¬B	B ⇔ ¬A	(A ⇒ ¬B) ∧ (B ⇔ ¬A)
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

② (A ⇒ B) ⇔ (¬B ⇒ ¬A)

A	B	¬A	¬B	A ⇒ B	¬B ⇒ ¬A	(A ⇒ B) ⇔ (¬B ⇒ ¬A)
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

tautologie

③ (C ⇒ ¬A) ∧ (¬B ⇔ C)

A	B	C	¬A	¬B	C ⇒ ¬A	¬B ⇔ C	(C ⇒ ¬A) ∧ (¬B ⇔ C)
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY

$\forall$ obecný kvantifikátor
$\exists$ existenční kvantifikátor
$\nexists$ neexistenční kvantifikátor

Př.:

① druhá mocnina každého reálného čísla je kladná
$\forall x \in R : x^2 > 0$

② existuje přirozené číslo, které je kořenem rovnice: $x^2 - 9 = 0$
$\exists x \in N : x^2 - 9 = 0$

③ $\forall x \in N : x = 2k \Rightarrow x^2 = 2l$
pro všechna přirozená čísla platí, že jestliže je dané číslo sudé, je jeho druhá mocnina sudá

2. Množiny – operace, intervaly

Množina je souhrn prvků, které chápeme jako celek.

Zápis množin:

A, B, C … množiny

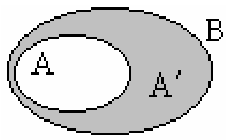
1) výčet prvků: $A = \{1; 2; 3\}$
2) interval: $B = \langle -3; 5)$
3) charakteristická vlastnost: $A = \{x \in N; x \leq 3\}$

$B = \{x \in N; -3 \leq x < 5\}$

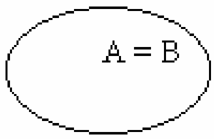
$C = \{x \in N; |x - 1| \leq 4\}$

Operace s množinami:

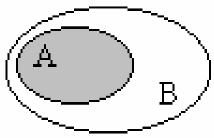
doplněk A'



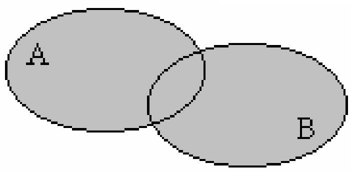
rovnost $A = B$



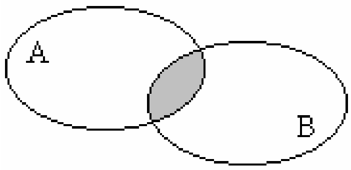
podmnožina (inkluze) $A \subset B$



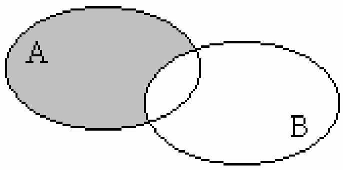
sjednocení $A \cup B$

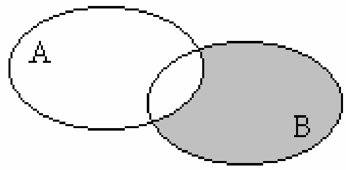


průnik $A \cap B$



rozdíl A-B; B-A





Číselné množiny:

N ...... přirozená čísla $N = \{1;2;3;\ldots\}$

N_0..... nezáporná přirozená čísla $N_0 = \{0;1;2;3;\ldots\}$

Z....... celá čísla $Z = \{\ldots -3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$

Q ...... racionální čísla $Q = \{\ldots -2;-1,5;-1;-0,75;-0,3;0;0,3;0,75;1;1,5;2;\ldots\}$

R ...... reálná čísla $R = \{\pi;\sqrt{2}\}$

C ...... komplexní čísla $C = \{\sqrt{-1}\}$

Platí: $N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

Absolutní hodnotou reálného čísla rozumíme číslo $|a|$, které má tyto vlastnosti:

$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Př.:

$\left|\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$

$|-0,5| = 0,5$

Absolutní hodnota každého reálného čísla je rovna vzdálenosti tohoto čísla od počátku číselné osy.

INTERVALY

Množina reálných čísel, kterou můžeme znázornit na číselné ose úsečkou, nazýváme omezený interval. Ty množiny, které lze znázornit polopřímkou nebo přímkou nazýváme neomezené intervaly.

Omezené intervaly se dělí na:
1. uzavřený
2. otevřený
3. polouzavřený

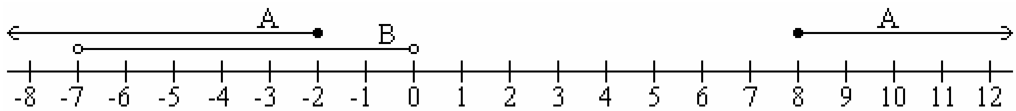
Omezené intervaly:

množina	*znázornění na ose*	*zápis intervalu*	*název intervalu*
$x \in R; a \le x \le b$		$\langle a; b \rangle$	uzavřený interval a;b
$x \in R; a < x \le b$		$(a; b\rangle$	polouzavřený interval a;b
$x \in R; a \le x < b$		$\langle a; b)$	polouzavřený interval a;b
$x \in R; a < x < b$		$(a; b)$	otevřený interval a;b
$x \in R; x \ge a$		$\langle a; \infty)$	zleva uzavřený interval a;∞
$x \in R; x > a$		$(a; \infty)$	zleva otevřený interval a; ∞
$x \in R; x \le a$		$(-\infty; a\rangle$	zprava uzavřený interval -∞;a
$x \in R; x < a$		$(-\infty; a)$	zprava otevřený interval -∞;a

Př.:

$A = \{x \in R; |x-3| \ge 5\}$

$B = (-7;0)$



$A \cap B = (-7;-2\rangle$

$A \cup B = (-\infty;0) \cup \langle 8;\infty)$

$A - B = (-\infty;-7\rangle \cup \langle 8;\infty)$

$B - A = (-2;0)$

3. Algebraické výrazy – práce s mnohočleny, algebraické vzorce

Výraz obecně:

- množinový $(A \cap B) \cup C$
- číselný $1+2;\, 2;\, \frac{\pi}{2};\, \sqrt{3}$
- výraz s proměnnou $5y - 3\sqrt{2};\, \sqrt{x+2}$
- lomený výraz $\frac{5}{x};\, \frac{a+b}{a-b}$

Legenda:

1; 2; 3; 5; π............konstanty
a; b ....proměnné
A; B; C.................množiny

U lomených výrazů a výrazů s odmocninou je nutné udat podmínky pro proměnnou, aby měl výraz smysl.

Např.: $\frac{a+6}{c}$ $\quad c \neq 0$

MNOHOČLENY

Mnohočlen obecně:

$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

Např.: $2x^2 - 3x + 2;\, 3x^5 + 64x^2;\, 5x^6 - \frac{1}{3}x$

Sčítání a odčítání mnohočlenů:

Sčítat a odčítat se mohou pouze mnohočleny se stejnou proměnnou a stejnou mocninou dané proměnné.

Př.:

$(x^3 + 3x^2 - 4x + 1) + (x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 4x + 3$

$(x^5 - 6x^4 + 5x^2 - x + 3) - (x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 4x - 1) = x^5 - 6x^4 + 5x^2 - x + 3 - x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4x + 1 =$

$= x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 4$

$(a + b - c) - [-(b - 3c)] = a + b - c - [-b + 3c] = a + b - c + b - 3c = a + 2b - 4c$

Násobení mnohočlenů:

Př.:

$\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}xy - \frac{5}{3}\right) \cdot (-24xy^2) = -18x^3y^2 + 4x^2y^3 + 40xy^2$

$(3xy^2 + 2x - 3y) \cdot (4x + xy) = 12x^2y^2 + 8x^2 - 12xy + 3x^2y^3 + 2x^2y - 3xy^2$

Dělení mnohočlenů jednočlenem:
Čísla se dělí, exponenty odčítají.

Př.:
$$\left(18a^4 - 27a^3 + 9a^2 - 90a\right) : \left(9a\right) = 2a^3 - 3a^2 + a - 10$$
podmínka: $a \neq 0$

Dělení mnohočlenů mnohočlenem:

Př.:
$$\left(20a^3 + 32a^2 + 7a^4 - 5a\right) : \left(-1 + 7a\right) =$$
$$= \left(7a^4 + 20a^3 + 32a^2 - 5a\right) : \left(7a - 1\right) = a^3 + 3a^2 + 5a$$
$$-\left(7a^4 - a^3\right)$$
$$21a^3 + 32a^2 - 5a$$
$$-\left(21a^3 - 3a^2\right)$$
$$35a^2 - 5a$$
$$-\left(35a^2 - 5a\right)$$
$$0$$

ALGEBRAICKÉ ROVNICE

Součtové vzorce:

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B)$

$A^3 + B^3 = (A+B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$

Př.:

① $(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

② $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

③ $0{,}001 + 0{,}012x + 0{,}048x^2 + 0{,}064x^3 = (0{,}1 + 0{,}4x)^3$

Vietovy vzorce:

$x^2 + px + q = (x - x_1)\cdot(x - x_2)$

$x_1 \cdot x_2 = p$

$x_1 + x_2 = -q$

Př.:

$x^2 - 8x + 12 = (x-2)\cdot(x-6)$

$x_1 \cdot x_2 = 2\cdot 6 = 12$

$x_1 + x_2 = 2 + 6 = 12$

$x_1 = 2;\ x_2 = 6$

Rozklad výrazu v součin:

1. vytýkáním
2. pomocí vzorců
3. rozkladem kvadratického trojčlenu pomocí Vietových vzorců

Př.:

① $18a - 45a^2 + 63a^3 = 9a(2 - 5a + 7a^2)$

② $x^2 - \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$

③ $m^6 - m^4 + 2m^3 + 2m^2 = m^4(m^2 - 1) + 2m^2(m + 1) = m^4(m - 1)(m + 1) + 2m^2(m + 1) =$
$= m^2(m + 1)[m^2(m - 1) + 2] = m^2(m + 1)(m^3 - m^2 + 2)$

④ $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$
$x_1 \cdot x_2 = 12 = 2 \cdot 6$
$x_1 + x_2 = 8 = 2 + 6$
$x_1 = 2; x_2 = 6$

---

4. Lomené výrazy

Rozšiřování lomených výrazů:

Lomený výraz se rozšiřuje tak, že se čitatel i jmenovatel násobí stejným výrazem.

Rozšíření výrazu výrazem *r*: $\frac{a \cdot r}{b \cdot r}; b \neq 0, r \neq 0$

Př.:

Rozšiř výraz $\frac{x}{b}$ výrazem $(a + x)$.

$$\frac{x \cdot (a + x)}{b \cdot (a + x)} = \frac{ax + x^2}{ab + bx} \qquad ax \neq bx$$

Krácení lomených výrazů:

Lomený výraz se krátí tak, že se čitatel i jmenovatel vydělí stejným výrazem.

Krácení výrazu výrazem *r*: $\frac{a : r}{b : r}; b \neq 0, r \neq 0$

Př.:

① $$\frac{a^5 b^3}{a^2 b^5} = \frac{a^3}{b^2} \qquad b \neq 0$$

② $$\frac{a^2 - b^2}{2a - 4ab + 2b^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{(a - b)(a + b)}{2(a - b)^2} = \frac{a + b}{2(a - b)} \qquad a \neq b$$

③ $$\frac{18a - 30}{12a^2 - 20a} = \frac{6(3a - 5)}{4a(3a - 5)} = \frac{6}{4a} = \frac{3}{2a} \qquad a \neq 0$$

④ $$\frac{3x^2 - 3xy}{x^2 - y^2} = \frac{3x(x - y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{3x}{x + y} \qquad x \neq y$$

Základní tvar zlomku: ***Je to takový tvar zlomku, který nelze dále krátit.***

Sčítání a odčítání lomených výrazů:

Př.:

① $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$

② $\frac{3x-y}{2x-y}-\frac{y-2}{y-2x}-\frac{x-y2}{2x-y}=\frac{(-1)(3x-y)-(y-2)-(-1)(x-2y)}{(-1)(2x-y)}=\frac{-3x+y-y+2+x-2y}{-2x+y}=$

$=\frac{2-2x-2y}{-2x+y}$

$2x\neq\pm y$

③ $\frac{a+1}{a^2+2a}-\frac{2a}{a^2-4}+\frac{a+1}{a(a+2)}=\frac{a+1}{a(a+2)}-\frac{2a}{(a-2)(a+2)}+\frac{a+1}{a(a+2)}=$

$=\frac{a(a+1)(a+2)(a-2)-2a^2(a+2)(a-2)+a(a+1)(a+2)(a-2)}{a(a+2)(a-2)}=$

$a\neq\pm 2$

$a\neq 0$

$=\frac{(a^2+a)(a^2-4)-(2a^3+4a^2)(a-1)+(a^2+a)(a^2+4)}{a(a^2-4)}=$

$=\frac{a^2+a-2a-2-2a^2+a^2+a+2a+2}{a(a^2-4)}=\frac{2a}{a(a^2-4)}=\frac{2}{a^2-4}$

Násobení lomených výrazů:

Lomené výrazy se násobí tak, že se vynásobí čitatel s čitatelem a jmenovatel se jmenovatelem.

Př.:

① $\frac{(x-1)^2}{y^3}\cdot\frac{(x+1)\cdot y^2}{x-1}=\frac{x-1}{y}\cdot(x+1)=\frac{x^2-1}{y}$

② $\frac{5x+5y}{3x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}=\frac{5(x+y)}{3x-y}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{5}{3x-y}\cdot(x-y)=\frac{5(x-y)}{3x-y}$

Dělení lomených výrazů:

Dělit lomené zlomky znamená násobit dělenec převrácenou hodnotou dělitele (dělenec/dělitel = podíl):

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Př.:

①
$$\frac{\frac{32x^2y^2}{14a^2b^3}}{\frac{8xy^2}{7a^3b^2}}=\frac{32x^2y^2}{14a^2b^3}\cdot\frac{7a^3b^2}{8xy^2}=\frac{4x}{2b}\cdot a=\frac{2xa}{b}$$

②
$$6a-\frac{\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}}{\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}}=6a-\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right)\cdot\frac{a^4-2a^3+8a-16}{4a}=$$

$$=6a-\frac{a(a+2)-a(a-2)}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a^4-2a^3+8a-16}{4a}=6a-\frac{a^2+2a-a^2+2a}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a^4-2a^3+8a-16}{4a}=$$

$$=6a-\frac{4a}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a^3(a-2)+8(a-2)}{4a}=6a-\frac{4a}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{(a^3+8)(a-2)}{4a}=$$

$$=6a-\frac{(a^3+8)(a-2)}{(a-2)(a+2)}=6a-\frac{a^3+8}{a+2}=6a-\frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a+2}=6a-(a^2-2a+4)=$$

$$=6a-a^2+2a-4=-a^2+8a-4$$

③
$$\frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}=\frac{\frac{x^2+y^2-xy}{xy}\cdot\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x^2+y^2-xy}{xy}\cdot\frac{(y-x)^2}{x^2y^2}}{\frac{x^4y^4-x^3y-xy^3}{x^2y^2}}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-xy}{xy}\cdot\frac{(y-x)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{x^4y^4-x^3y-xy^3}=\frac{(x^2+y^2-xy)(y-x)^2}{xy(x^4y^4-x^3y-xy^3)}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2-xy)(y-x)^2}{xy[(-x^3)(y-x)+y^3(y-x)]}=\frac{(x^2+y^2-xy)(y-x)^2}{xy(y-x)(y^3-x^3)}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2-xy)(y-x)}{xy(y^3-x^3)}=\frac{(x^2+y^2-xy)(y-x)}{xy(y-x)(y^2+xy+x^2)}=\frac{1}{xy}$$

---

5. Mocniny a odmocniny

MOCNINY

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n-\text{krát}}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} \qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad a^r : a^s = a^{r-s}$$

ODMOCNINY

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s} \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{a^p} \qquad \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Př.:

①

a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{3^{-1}}{4^{-1}} = \frac{4}{3}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

d) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-2} = \pi^2$

②

a) $\frac{(-2)^3 \cdot 2^2}{(-2)^2 \cdot 2} = \frac{-8 \cdot 4}{4 \cdot 2} = -\frac{32}{8} = -4$

b) $\frac{\left(2^3 \cdot 3\right)^3}{(2 \cdot 3)^2} = \frac{2^9 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 3^2} = 2^7 \cdot 3$

c) $\frac{a^3 b^{-4}}{a^{-2} b^3} = \frac{a^3 a^2}{b^4 b^3} = \frac{a^5}{b^7} = a^5 b^{-7}$

③ $\left(\frac{a^2 b^{-3}}{c^{-2} d^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{c^4 d^{-1}}{a^{-3} b^2}\right)^2 = \frac{a^{-2} b^3}{c^2 d^{-3}} \cdot \frac{c^8 d^{-2}}{a^{-6} b^4} = \frac{b^3 d^3}{a^2 c^2} \cdot \frac{a^6 c^8}{b^4 d^2} = \frac{d}{1} \cdot \frac{a^4 c^6}{b} = \frac{a^4 c^6 d}{b}$

④ $14^{n+1} \cdot 35^{2n+3} \cdot 42^{3n-4} \cdot 70^{1-n} = (2 \cdot 7)^{n+1} \cdot (5 \cdot 7)^{2n+3} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^{3n-4} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)^{1-n} =$

$= 2^n \cdot 2 \cdot 7^n \cdot 7 \cdot 5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 2^{3n} \cdot 3^{3n} \cdot 7^{3n} \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 7^{-4} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^{-n} \cdot 5^{-n} \cdot 7^{-n} =$

$= 2^{3n} \cdot 3^{3n} \cdot 5^n \cdot 7^{5n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot 5^4 \cdot 7 = 2^{3n-2} \cdot 3^{3n-4} \cdot 5^{n+4} \cdot 7^{5n+1}$

⑤

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}\cdot a^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}}=\frac{a^{\frac{3}{15}}}{a^{\frac{3}{10}}\cdot a^{-\frac{3}{5}}}=\frac{a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{3}{10}}}=\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{10}}}=a^{\frac{8-3}{10}}=a^{\frac{5}{10}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

⑥

$$\frac{\left[\left(a^3b\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(a^3b^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(a^3b\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(a^3b^{-2}\right)^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{3}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{3}{6}}\cdot b^{-\frac{2}{6}}}=\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{2}{6}}}=b^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{2}{6}}=b^{\frac{3}{6}}=b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}$$

⑦

$$\frac{(x+y)^{2a+1}\cdot(u-v)^{2a+1}\cdot(x-y)^{2a+2}}{(u-v)^{2a-1}\cdot\left(x^2-y^2\right)^{2a+1}\cdot(u-v)^2}=$$

$$=\frac{(x+y)^{2a}\cdot(x+y)\cdot(u-v)^{2a}\cdot(u-v)\cdot(x-y)^{2a}\cdot(x-y)^2}{(u-v)^{2a}\cdot(u-v)^{-1}\cdot\left(x^2-y^2\right)^{2a}\cdot\left(x^2-y^2\right)\cdot(u-v)^2}=$$

$$=\frac{(x+y)^{2a}\cdot(x+y)\cdot(x-y)^{2a}\cdot(x-y)^2}{\left(x^2-y^2\right)^{2a}\cdot\left(x^2-y^2\right)}=$$

$$=\frac{(x+y)^{2a}\cdot(x+y)\cdot(x-y)^{2a}\cdot(x-y)^2}{(x-y)^{2a}\cdot(x+y)^{2a}\cdot(x-y)\cdot(x+y)}=x-y$$

⑧

$$\frac{1}{\sqrt[5]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{b^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{b^2}}=\frac{\sqrt[5]{b^2}}{b}$$

6. Lineární funkce, lineární rovnice

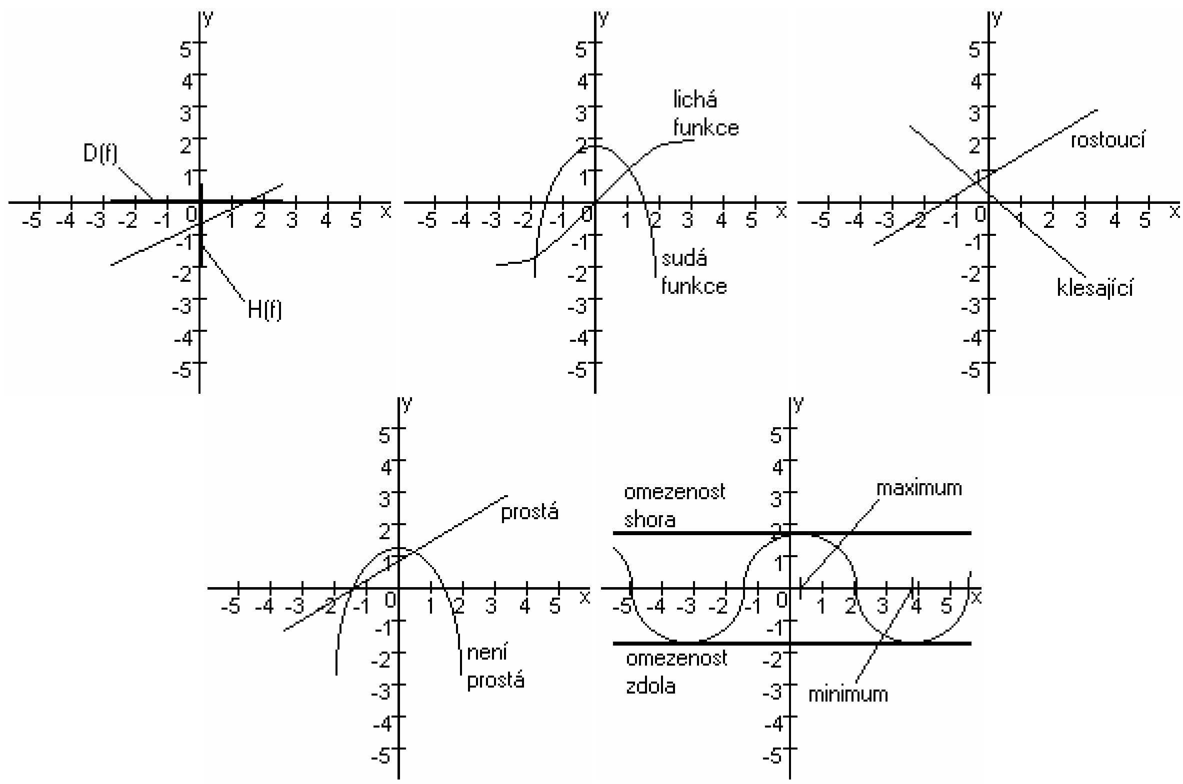
LINEÁRNÍ FUNKCE

Funkce f ***definovaná na množině*** $M \subset R$ ***je pravidlo, které každému prvku*** x ***z množiny*** M ***přiřadí právě jedno*** y.

$y = f(x)$ ....**y** je funkcí **x**

Lineární funkce - funkce $y = ax + b$ (**a**…směrnice, **b**…úsek), kde **a** a **b** jsou reálná čísla, se nazývá lineární funkce. Grafem lineární funkce je přímka nebo její část (úsečka, polopřímka).
Graf funkce - grafem funkce $y = f(x)$ rozumíme množinu všech bodů $[x; y]$ v rovině.

Vlastnosti funkce:
definiční obor........**D(f)** .... množina všech **x**
obor hodnot...........**H(f)** .... množina všech **y**
je to množina všech **y**, ke kterým existuje aspoň jedno **x** z definičního oboru
sudost....................f(x) = f(-x)....... graf funkce je souměrný podle osy **y**
lichost ....f(x) = -f(-x) ..... graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic
rostoucí .... $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
klesající................ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
prostá................... $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ...jakýmkoli dvěma **x** nenáleží totéž **y**
omezenost zdola a shora
minimum a maximum

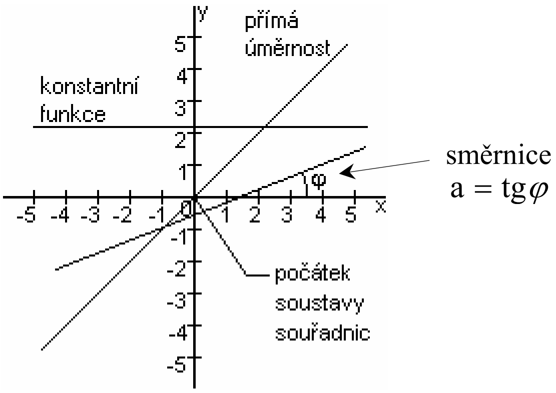


Zvláštní případy lineární funkce:

$a = 0, b = 0 \Rightarrow y = 0$ .... grafem je osa **x**

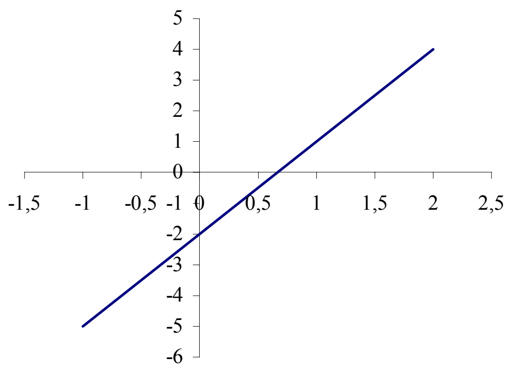
$a = 0, b \neq 0 \Rightarrow y = b$ .... grafem je rovnoběžka s osou **x** - **konstantní funkce** (**b**…úsek na ose **y**)

$a \neq 0, b = 0 \Rightarrow y = ax$ .... grafem je přímka procházející počátkem – **přímá úměrnost** (**a**…směrnice přímky)



Př.:

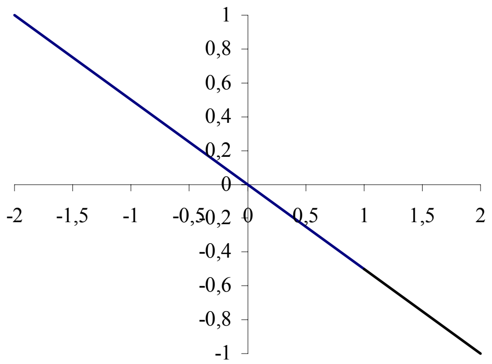
① $y = 3x - 2; D(f) = \langle -1; 2 \rangle$



$H(f) = \langle -5; 4 \rangle$

ani sudá, ani lichá
rostoucí
prostá

② $y = -0{,}5x$



lichá
klesající
prostá

LINEÁRNÍ ROVNICE

Lineární rovnicí o jedné neznámé nazýváme rovnici ve tvaru $ax = b$***, kde*** a ***a*** b ***jsou reálná čísla a*** x ***je neznámá.***

Ekvivalentní úpravy:

- přičtení nebo odečtení stejného výrazu k oběma stranám rovnice
- vynásobení nebo dělení obou stran stejným nenulovým výrazem

Řešení lineárních rovnic:

- $x = 1;\ x = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ rovnice má jediné řešení
- $2 = 2;\ 0 = 0$ $\Rightarrow$ rovnice má nekonečně mnoho řešení
- $3 = -1;\ -2 = 4$ $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení

Př.:

①
$$\frac{3x-1}{5} = \frac{1}{10} \qquad \Big| \cdot 10$$
$$\frac{10(3x-1)}{5} = \frac{10}{10}$$
$$2(3x-1) = 1$$
$$6x - 2 = 1$$
$$6x = 1 + 2$$
$$6x = 3$$
$$x = \frac{3}{6}$$
$$x = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

②
$$\frac{4x-5}{2} = x - (1 - x) \qquad \Big| \cdot 2$$
$$4x - 5 = 2x - 2(1 - x)$$
$$4x - 5 = 2x - 2 + 2x$$

rovnice nemá řešení

$$4x - 5 = 4x - 2$$
$$4x - 4x = 5 - 2$$
$$0 = 3$$

③
$$2(2x+3) = 8(1-x) - 5(x-2)$$
$$4x + 6 = 8 - 8x - 5x + 10$$
$$4x + 6 = 18 - 13x$$
$$17x = 12$$
$$x = \frac{12}{17}$$

④ $$\frac{3x-1}{5}-\frac{1+x}{2}=3-\frac{x-1}{4} \qquad \Big|\cdot 20$$

$$4(3x-1)-10(1+x)=60-5(x-1)$$

$$12x-4-10-10x=60-5x+5$$

$$2x-14=65-5x$$

$$7x=79$$

$$x=\frac{79}{7}$$

⑤ $$\frac{3x-1}{3}-\frac{3x-2}{6}+\frac{x}{2}=x-1 \qquad \Big|\cdot 6$$

$$2(3x-1)-(3x-2)+3x=6x-6$$

$$6x-2-3x+2+3x=6x-6$$

rovnice nemá řešení

$$6x-6x=-6$$

$$0=-6$$

7. Lineární rovnice s parametrem, s absolutní hodnotou

LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM

Rovnice s parametrem obsahuje kromě neznámých další proměnné, kterým se říká **parametry**. Je to zápis množiny všech rovnic, které lze získat dosazením všech hodnot, jichž mohou parametry nabývat. Řešení rovnic s parametry spočívá v určení jejich kořenů v závislosti na přípustných hodnotách parametrů.

Při řešení **lineární rovnice s parametrem** se rovnice postupně upravuje v závislosti na hodnotách parametru.

Př.:

① x … neznámá; p … parametr

$$p^3x - 1 = px + p$$
$$p^3x - px = p + 1$$
$$p(p+1)(p-1)x = p + 1$$

$p = 0$	$p \neq 0$
$0x = 1$	$(p+1)(p-1)x = \dfrac{p+1}{p}$
$P_1 = \emptyset$	
$p = -1$	$p \neq -1$
$0x = 0$	$(p-1)x = \dfrac{1}{p}$
$P_2 = R$	
$p = 1$	$p \neq 1$
$0x = 1$	$x = \dfrac{1}{p(p-1)}$
$P_3 = \emptyset$	
	$P_4 = \left\{ \dfrac{1}{p(p-1)} \right\}$

LINEÁRNÍ ROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Př.:

① $|x+3| = 6$

nulový bod: $\begin{aligned} x+3&=0 \\ x_0&=-3 \end{aligned}$

	$(-\infty;-3\rangle$	$\langle 3;\infty)$
$\|x+3\|$	$(-x-3)$	$(x+3)$
	$-x-3=6$	$x+3=6$
	$-9=x$	$x=3$
	$P_1=\{-9\}$	$P_2=3$

$P = P_1 \cup P_2 = \{-9;3\}$

② $|x-7| + 4x = |2x-5|$

nulové body: $\begin{aligned} x-7&=0 \\ x_0&=7 \end{aligned}$ $\quad$ $\begin{aligned} 2x-5&=0 \\ x_0&=\frac{5}{2} \end{aligned}$

	$\left(-\infty;\frac{5}{2}\right\rangle$	$\left\langle\frac{5}{2};7\right\rangle$	$\langle 7;\infty)$
$\|x-7\|$	$-x+7$	$-x+7$	$x-7$
$\|2x-5\|$	$-2x+5$	$2x-5$	$2x-5$
	$-x+7+4x=-2x+5$	$-x+7+4x=2x-5$	$x-7+4x=2x-5$
	$3x+7=-2x+5$	$3x+7=2x-5$	$5x-7=2x-5$
	$5x=-2$	$x=-12$	$3x=2$
	$x=-\frac{2}{5}$	$P_2=\{-12\}$	$x=\frac{2}{3}$
	$P_1=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$		$P_3=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \left\{-12;-\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right\}$

8. Soustava lineárních rovnic

2 ROVNICE O 2 NEZNÁMÝCH

Metody řešení:

1) sčítací
2) dosazovací
3) srovnávací (komparační)
4) grafická

Př.:

$$3x + 2y = 8$$
$$x - 5y = -3$$

1)
$$3x + 2y = 8$$
$$\underline{x - 5y = -3 \quad \big| \cdot (-3)}$$
$$3x + 2y = 8$$
$$\underline{-3x + 15y = 9}$$
$$17y = 17$$
$$y = 1$$

$$x - 5y = -3$$
$$x - 5 \cdot 1 = -3$$
$$x = 2$$

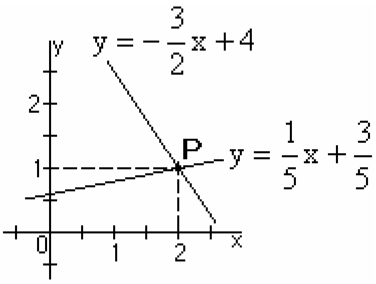
2)
$$3x + 2y = 8$$
$$\underline{x - 5y = -3 \rightarrow x = 5y - 3}$$
$$3(5y - 3) + 2y = 8$$
$$15y - 9 + 2y = 8$$
$$17y = 17$$
$$y = 1$$

$$x - 5y = -3$$
$$x - 5 \cdot 1 = -3$$
$$x = 2$$

3)
$$3x + 2y = 8$$
$$\underline{x - 5y = -3}$$
$$2y = -3x + 8$$
$$\underline{5y = x + 3}$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$
$$\underline{y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}}$$
$$y = y$$
$$-\frac{3}{2}x + 4 = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$
$$4 - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}x$$
$$\frac{20}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2x + 15x}{10}$$
$$\frac{17}{5} = \frac{17}{10}x$$
$$\frac{\frac{17}{5}}{\frac{17}{10}} = x$$
$$\frac{17}{5} \cdot \frac{10}{17} = x$$
$$2 = x$$

$$x - 5y = -3$$
$$2 - 5y = -3$$
$$5 = 5y$$
$$1 = y$$

4)
$$3x + 2y = 8$$
$$\underline{x - 5y = -3}$$
$$2y = -3x + 8$$
$$\underline{5y = x + 3}$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$
$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$



FROBENIOVA VĚTA

A … matice soustavy
$\overline{A}$ … rozšířená matice soustavy

Př.:

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$$
$$2x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 1$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

soustava lineárních rovnic
(*m* rovnic o *n* neznámých)

homogenní

pravé strany všech rovnic soustavy jsou rovny 0

nehomogenní

alespoň jedna rovnice soustavy nemá pravou stranu rovnu 0

Př.:

Homogenní:

$$x + y - 3z = 0$$
$$-x + z = 0$$
$$3x + 2y - z = 0$$

Nehomogenní:

$$x - y + z = 1$$
$$3x + y = 2$$
$$4x - y + z = 0$$

soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, jestliže hodnost matice rozšířené se rovná hodnosti matice soustavy

$$h(A) = h(\overline{A})$$

Homogenní:

$h(A) = h(\overline{A}) = n$
soustava má jediné řešení (triviální)

$h(A) = h(\overline{A}) < n$
soustava má nekonečně mnoho řešení

Nehomogenní:

$h(A) = h(\overline{A}) = n$
soustava má jediné řešení (Cramerova metoda)

$h(A) = h(\overline{A}) < n$
soustava má nekonečně mnoho řešení

Př.:

①

$$x + y + z = 5$$
$$3x - 2y + z = 3$$
$$4x - y + 2z = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot(-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -2 & -12 \\ 0 & -5 & -2 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$h(A) = 2$$
$$h(\overline{A}) = 3$$
$$h(A) \neq h(\overline{A})$$

nehomogenní
soustava nemá řešení

2)

$$x + 2y + 5z = 0$$
$$3x + 4y + 7z = 0$$
$$5x + 6 + 9z = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot(-5) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$h(A) = 2$$
$$h(\overline{A}) = 2$$
$$h(A) = h(\overline{A}) < n$$

homogenní
soustava má nekonečně mnoho řešení

③

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-3) \\ |\cdot 2 \\ |\cdot 2 \end{array}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & -3 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |\cdot 5 \\ \\ \end{array}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 22 & -40 \end{array}\right]$$

$$h(A) = 3$$
$$h(\overline{A}) = 3$$
$$h(A) = h(\overline{A}) = n$$

nehomogenní
soustava má 1 řešení

CRAMEROVA METODA

Používá se pouze v případě *n* rovnic o *n* neznámých.

A … matice soustavy
D … determinant matice soustavy

$$D = \det A = |A|$$

$|A| = 0$ … soustava nemá řešení

$|A| \neq 0$ … soustava má právě jedno řešení $x = [x_1; x_2; x_3; \ldots x_n]$, kde:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$
$$i \in \{1;2;3;\ldots n\}$$

$$\left(x_1 = \frac{D_1}{D}; x_2 = \frac{D_2}{D}; x_3 = \frac{D_3}{D}; \ldots x_n = \frac{D_n}{D}\right)$$

D_i … determinant, který vznikne z determinantu soustavy nahrazením *i*-tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy.

Př.:
viz. 3 rovnice o 3 neznámých

---

3 ROVNICE O 3 NEZNÁMÝCH

Metody řešení:

1) dosazovací
2) sčítací
3) Cramerova
4) Gaussova eliminační

Př.:

$$2x+3y-z=5$$
$$3x-2y+2z=5$$
$$4x-y+3z=11$$

1)

$$2x+3y-z=5 \rightarrow z=2x+3y-5$$
$$3x-2y+2z=5$$
$$\underline{4x-y+3z=11}$$
$$3x-2y+2(2x+3y-5)=5$$
$$\underline{4x-y+3(2x+3y-5)=11}$$
$$3x-2y+4x+6y-10=5$$
$$\underline{4x-y+6x+9y-15=11}$$
$$7x+4y=15 \quad |\cdot(-2)$$
$$\underline{10x+8y=26}$$
$$-14x-8y=-30$$
$$\underline{10x+8y=26}$$
$$-4x=-4$$
$$x=1$$

$$7x+4y=15$$
$$7\cdot 1+4y=15$$
$$4y=8$$
$$y=2$$

$$2x+3y-z=5$$
$$z=2x+3y-5$$
$$z=2\cdot 1+3\cdot 2-5$$
$$z=3$$

2)

$$2x+3y-z=5 \quad |\cdot 2 \quad |\cdot 3$$
$$3x-2y+2z=5 \quad \hookleftarrow$$
$$\underline{4x-y+3z=11} \quad \hookleftarrow$$
$$7x+4y=15 \quad |\cdot(-2)$$
$$\underline{10x+8y=26}$$
$$-14x-8y=-30$$
$$\underline{10x+8y=26}$$
$$-4x=-4$$
$$x=1$$

$$7x+4y=15$$
$$7\cdot 1+4y=15$$
$$4y=8$$
$$y=2$$

$$2x+3y-z=5$$
$$z=2x+3y-5$$
$$z=2\cdot 1+3\cdot 2-5$$
$$z=3$$

3)

$$D=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}=-12+24+3-8+4-27=-16$$

$$D_1=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 5 & -2 & 2\\ 11 & -1 & 3\end{bmatrix}=-30+66+5-22-45+10=-16$$

$$D_2=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ 4 & 11 & 3\end{bmatrix}=30+40-33+20-45-44=-32$$

$$D_3=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & -2 & 5\\ 4 & -1 & 11\end{bmatrix}=-44+60-15+40-99+10=-48$$

$$x=\frac{D}{D_1}=\frac{-16}{-16}=1$$

$$y=\frac{D}{D_2}=\frac{-16}{-32}=2$$

$$z=\frac{D}{D_3}=\frac{-48}{-16}=3$$

4)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ 3 & -2 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3 & 11\end{array}\right]\begin{array}{l}|\cdot(-3)\quad |\cdot(-2)\\ |\cdot 2 \ \hookleftarrow\\ \qquad\qquad \hookleftarrow\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ 0 & -13 & 7 & -5\\ 0 & -7 & 5 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ |\cdot(-7)\\ |\cdot 13 \hookleftarrow\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ 0 & -13 & 7 & -5\\ 0 & 0 & 16 & 48\end{array}\right]$$

$2x+3y-z=5$

$-13y+7z=-5$

$\underline{16z=48\to z=3}$

$2x+3y-3=5$

$\underline{-13y+7\cdot 3=-5}$

$2x+3y=8$

$\underline{-13y=-26\to y=2}$

$2x+3\cdot 2=8$

$2x=2$

$x=1$

9. Lineární nerovnice, soustava lineárních nerovnic o jedné neznámé

LINEÁRNÍ NEROVNICE

Lineární nerovnice je každá nerovnice ve tvaru:

- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$

Ekvivalentní úpravy:

- přičtení nebo odečtení stejného výrazu k oběma stranám nerovnice
- vynásobení nebo dělení obou stran stejným nenulovým výrazem (záporný výraz obrací znaménko nerovnosti)

Řešení lineárních nerovnic – interval

Př.:

① $\frac{4u-3}{5} + \frac{4u-9}{6} \leq \frac{3u-4}{2} \quad |\cdot 30$

$6(4u-3) + 5(4u-9) \leq 15(3u-4)$

$24u - 18 + 20u - 45 \leq 45u - 60$

$44u - 63 \leq 45u - 60$

$-3 \leq u$

$P = (-\infty; -3\rangle$

② $\frac{2x-1}{2} - \frac{3x-3}{3} \geq \frac{1}{4} \quad |\cdot 12$

$6(2x-1) - 4(3x-3) \geq \frac{12}{4}$

$12x - 6 - 12x + 12 \geq 3$

$6 \geq 3$

$3 \geq 0$

$P \in R$

③ $\frac{5x+2}{7} - \frac{3x+4}{14} > \frac{x+3}{2} \quad |\cdot 14$

$2(5x+2) - (3x+4) > 7(x+3)$

$10x + 4 - 3x - 4 > 7x + 21$

$7x > 7x + 21$

$0 > 21$

nemá řešení

Lineární nerovnice v součinovém tvaru:

Př.:

① $$(3x+2)(4-5x)\le 0$$

$$\begin{array}{r|l}
3x+2\ge 0 & 3x+2\le 0 \\
\underline{4-5x\le 0} & \underline{4-5x\ge 0} \\
3x\ge -2 & 3x\le -2 \\
\underline{4\le 5x} & \underline{4\ge 5x} \\
x\ge -\frac{2}{3} & x\le -\frac{2}{3} \\
\frac{4}{5}\le x & \frac{4}{5}\ge x \\
 & \\
P_1=\left\langle \frac{4}{5};\infty\right) & P_2=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right\rangle
\end{array}$$

$$P=P_1\cup P_2=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{4}{5};\infty\right)$$

② $$\frac{2x+7}{x+3}\ge 0$$

$$\begin{array}{r|l}
2x+7\ge 0 & 2x+7\le 0 \\
\underline{x+3>0} & \underline{x+3<0} \\
2x\ge -7 & 2x\le -7 \\
\underline{x>-3} & \underline{x<-3} \\
x\ge -\frac{7}{2} & x\le -\frac{7}{2} \\
x>-3 & x<-3 \\
 & \\
P_1=(-3;\infty) & P_2=\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right\rangle
\end{array}$$

$$P=P_1\cup P_2=\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right\rangle\cup(-3;\infty)$$

③ $$\frac{2x+2}{x-1}<3$$

$$\frac{2x+2}{x-1}-3<0$$

$$\frac{2x+2-3(x-1)}{x-1}<0$$

$$\frac{2x+2-3x+3}{x-1}<0\frac{2x+2-3x+3}{x-1}<0$$

$$\frac{5-x}{x-1}<0$$

$$\begin{array}{r|l}
5-x<0 & 5-x>0 \\
\underline{x-1>0} & \underline{x-1<0} \\
5<x & 5>x \\
x>1 & x<1 \\
 & \\
P_1=(5;\infty) & P_2=(-\infty;1)
\end{array}$$

$$P=P_1\cup P_2=(-\infty;1)\cup(5;\infty)$$

Lineární nerovnice s absolutní hodnotou:

Př.:

① $|5-x|<7$

nulový bod: $5-x=0$, $5=x_0$

	$(-\infty;5\rangle$	$\langle 5;\infty)$
$\lvert 5-x\rvert$	$5-x$	$x-5$
	$5-x<7$	$x-5<7$
	$-2<x$	$x<12$
	$P_1=(-2;5\rangle$	$P_2=\langle 5;12)$

$P=P_1\cup P_2=(-2;12)$

② $|x+2|-x\geq 3-|x-3|$

nulové body: $x+2=0$, $x_0=-2$; $x-3=0$, $x_0=3$

	$(-\infty;-2\rangle$	$\langle -2;3\rangle$	$\langle 3;\infty)$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	$3-x$	$x-3$
	$-x-2-x\geq 3-3+x$	$x+2-x\geq 3-3+x$	$x+2-x\geq 3-x+3$
	$-2x-2\geq x$	$2\geq x$	$2\geq 6-x$
	$-2\geq 3x$	$P_2=\langle -2;2\rangle$	$x\geq 4$
	$-\frac{2}{3}\geq x$		$P_3=\langle 4;\infty)$
	$P_1=(-\infty;-2\rangle$		

$P=P_1\cup P_2\cup P_3=(-\infty;2\rangle\cup\langle 4;\infty)$

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH NEROVNIC O JEDNÉ NEZNÁMÉ

Př.:

①

$$\begin{array}{l} 4(x+1)-6(x-2)>5(x+1) \\ \underline{3x-2(x-1)<3(x+2)} \end{array}$$

$$4x+4-6x+12>5x+5$$

$$16-2x>5x+5$$

$$11>3x$$

$$\frac{11}{3}>x$$

$$P_1=\left(-\infty;\frac{11}{3}\right)$$

$$3x-2x+2<3x+6$$

$$x+2<3x+6$$

$$-4<2x$$

$$-2<x$$

$$P_2=(-2;\infty)$$

$$P=P_1\cap P_2=\left(-2;\frac{11}{7}\right)$$

②

$$\begin{array}{l} 2(x-2)-3(x+1)\geq 3x-1 \\ 4(2-x)+2(x-1)>5x+3 \\ \underline{7(x-4)-2x\geq 3x-2} \end{array}$$

$$2x-4-3x-3\geq 3x-1$$

$$-x-7\geq 3x-1$$

$$-6\geq 4x$$

$$-\frac{6}{4}\geq x$$

$$-\frac{3}{2}\geq x$$

$$P_1=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$8-4x+2x-2>5x+3$$

$$6-2x>5x+3$$

$$3>7x$$

$$\frac{3}{7}>x$$

$$P_2=\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)$$

$$7x+28-2x\geq 3x-2$$

$$5x+28\geq 3x-2$$

$$2x\geq -30$$

$$x\geq -15$$

$$P_3=\langle -15;\infty)$$

$$P=P_1\cap P_2\cap P_3=\left\langle -15;-\frac{3}{2}\right\rangle$$

③

$$\begin{array}{l} 3x-2>2x+1 \\ \underline{2x+1\geq 7x-3} \end{array}$$

$$x>3$$

$$P_1=(3;\infty)$$

$$4\geq 5x$$

$$\frac{4}{5}\geq x$$

$$P_2=\left(-\infty;\frac{4}{5}\right\rangle$$

$$P=P_1\cap P_2=\emptyset$$

10. Maticový počet, operace s maticemi, hodnost, determinant

Matice typu (m;n) ***je množina*** $m \cdot n$ ***čísel uspořádaných do obdelníkového tvaru o*** m ***řádcích a*** n ***sloupcích.***

$$A_{(m;n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{mn} …**prvek matice**

Př.:

$$A_{(3;4)} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{23} &= 5 \\ a_{34} &= 7 \\ a_{11} &= -1 \end{aligned}$$

matice typu (3;4)

TYPY MATIC

Nulová matice - každý její prvek je roven nule

$$0_{(m;n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Čtvercová matice n-tého stupně - má stejný počet řádků i sloupců

$$A_{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonální matice - čtvercová matice, která má, kromě diagonály (a_n), všechny prvky nulové.

$$A_{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jednotková matice - diagonální matice, kde všechny prvky diagonály jsou rovny 1.

$$E_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Transportovaná matice k matici $\mathbf{A_{(m;n)}}$ - je matice $\mathbf{A^T}$ typu $_{(m;n)}$ ⇔ mění se řádky za sloupce a naopak.

Př.:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

OPERACE S MATICEMI

Rovnost matic:

Matice $A_{(m,n)} = \lfloor a_{ij} \rfloor, B_{(m,n)} = \lfloor b_{ij} \rfloor$ ***jsou si rovny, jestliže*** $a_{ij} = b_{ij}$.

Př.:

$$A = B \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Sčítání a odčítání matic:

$$A \pm B = C \Leftrightarrow a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$$

Př.:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3+(-1) & (-1)+1 \\ 1+2 & 5+(-3) \\ 2+3 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 1-1 \\ 1+2 & 5-3 \\ 2+3 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 3-(-1) & (-1)-1 \\ 1-2 & 5-(-3) \\ 2-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -1-1 \\ 1-2 & 5+3 \\ 2-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Násobení matic konstantou:

Matice se násobí číslem $k \in R$ *tak, že se tímto číslem vynásobí každý člen matice.*

Př.:

$$k = 2;\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Násobení matice maticí:

Matici $A_{(m;n)}$ *můžeme násobit pouze maticí* $B_{(n;p)}$*, tj. matice* B *má tolik řádků, kolik má matice* A *sloupců. Součinem takových dvou matic* $A \cdot B$ *je matice* $C_{(m;p)}$.

Př.:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (3;-1;2) \cdot (4;2;2) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12 - 2 + 4 = 14$$
$$c_{12} = (3;-1;2) \cdot (1;2;-1) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 - 2 = -1$$
$$c_{13} = (3;-1;2) \cdot (0;5;4) = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 0 - 5 + 8 = 3$$
$$c_{21} = (2;3;-2) \cdot (4;2;2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 = 8 + 6 - 4 = 10$$
$$c_{22} = (2;3;-2) \cdot (1;2;-1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 2 + 6 + 2 = 10$$
$$c_{23} = (2;3;-2) \cdot (0;5;4) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 4 = 0 + 15 - 8 = 7$$

$$C = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 3 \\ 10 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Násobení matic není obecně komutativní - $A \cdot B \neq B \cdot A$

HODNOST MATICE

Hodností matice A ***rozumíme maximální počet lineárně závislých řádků matice*** A: $A_{(m;n)}$

$h(A) \leq m$.

Lineárně závislé řádky - jeden řádek je násobkem druhého.

Hodnost matice se nezmění, při:

- záměně pořadí řádků
- násobení řádku číslem různým od nuly
- přičtení nebo odečtení řádku k jinému řádku
- přidání nebo vynechání řádku, který je násobkem řádku jiného

Regulární a singulární matice:

> ***Čtvercová matice*** A_n ***se nazývá regulární, jestliže hodnost*** n***-té matice je rovna*** m***, jinak se nazývá singulární.***

Trojúhelníkový tvar matice:

> ***Říkáme, že matice má trojúhelníkový tvar, jestliže každý její nenulový řádek začíná větším počtem nul, než řádek předcházející.***

Má-li matice trojúhelníkový tvar, pak počet jejich nenulových řádků je roven hodnosti matice.

Př.:

①

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h(A) = 1$$

②

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \big|\cdot(-2) & \big|\cdot(-3) \\ \lrcorner + & \\ & \lrcorner + \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & -13 \end{bmatrix} \begin{matrix} & \\ & \big|\cdot 8 \\ \big|\cdot(-3) & \lrcorner + \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & 41 \end{bmatrix}$$

$$h(A) = 1$$

DETERMINANTY

Nechť je dána čtvercová matice $A_{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Determinantem řádu n ***matice*** A ***nazýváme číslo*** D ***a značíme*** $D = \det A = |A|$***, které definujeme takto:***

- ***je-li*** n = 1 ***pak*** $D = a_{11}$
- ***je-li*** n = 2 ***pak*** $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- ***je-li*** n = 3 ***pak se*** D ***vypočítá Sarrusovým pravidlem***
- ***je-li*** n = 4 ***pak se*** D ***vypočítá pomocí rozvoje podle libovolného řádku či sloupce***

Determinanty 1. řádu:

Př.:

$|-5| = -5$

Determinanty 2. řádu:

Př.:

① $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

② $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 5 - 0 = 5$

③ $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - (-1) \cdot a = a + a = 2a$

Determinanty 3. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} = D$$

Př.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 = 6 + 105 + 48 + 96 + 64 + 84 = 403$$

Determinanty 4. řádu:

- hodnota determinantu se nezmění zaměněním řádků za sloupce
- jestliže v determinantu jeden řádek tvoří samé nuly, rovná se determinant nule
- jestliže se v determinantu zamění dva řádky, determinant změní znaménka
- jestliže má determinant dva řádky stejné, rovná se determinant nule
- je-li některý řádek determinantu násobkem řádku jiného, rovná se determinant nule
- násobí-li se některý řádek determinantu **D** reálným číslem různým od nuly, vznikne determinant **D‘**, pro který platí **D‘ = -D**
- přičte-li se k některému řádku determinantu násobek jiného řádku, determinant se nezmění

Př.:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - (1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - (0)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(4-2-2-4-4-1) - (2+2+2+4-2+1) + (-1+2-4-2-2-2) - 0 =$$

$$= (-2)\cdot(-9) - 9 + 9 = 18 - 18 = 0$$

---

11. Kvadratické funkce

Kvadratickou funkcí se nazývá každá funkce ve tvaru
$y = ax^2 + bx + c; a, b, c, x \in R; a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c$ ....kvadratický trojčlen
ax^2 ....kvadratický člen
bx ....lineární člen
c ....absolutní člen

Graf kvadratické funkce – parabola.

Vrchol paraboly: $V = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$

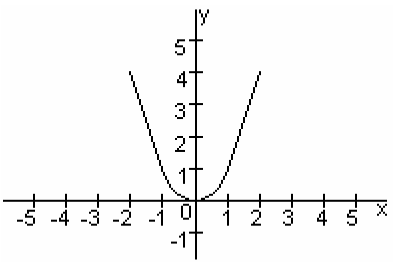
Průsečíky paraboly s osou *x*: $ax^2 + bx + c = 0$

Vlastnosti funkce:
$y = x^2$.......... základní parabola
$a > 0$ .... parabola otevřená nahoru
$a < 0$ .... parabola otevřená dolů
c .... průsečík paraboly s osou *y*

Př.:

① $y = x^2$

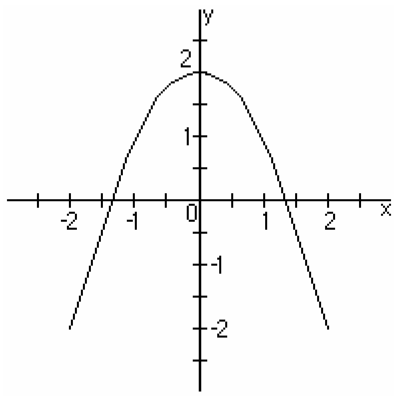
$V = [0;0]$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{0 \pm \sqrt{0}}{2} = 0$$

② $y = -x^2 + 2$

$V = [0;2]$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{0 \pm \sqrt{8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Rovnice tvaru $y=(x+r)^2+p$ **:**

Vlastnosti funkce:

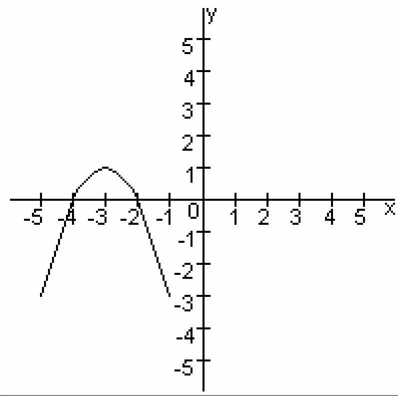
Posun vrcholu paraboly ve směru osy *y*:
$p>0$........... nahoru
$p<0$........... dolů
Posun vrcholu paraboly ve směru osy *x*:
$r>0$............ doleva
$r<0$............ doprava

Př.:

$$y=-x^2-6x-8$$

$$y=-x^2-6x-8=-(x^2+6x+8)=$$
$$=-(x^2+6x+9-9)-8=-(x^2+6x+9)+9-8=$$
$$=-(x+3)^2+1$$

$$V=[-3;1]$$



12. Kvadratické rovnice – metody řešení

Kvadratická rovnice o jedné neznámé x ***se nazývá každá rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar:*** $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0; a, b, c \in R$

$ax^2 + bx + c$ .... kvadratický trojčlen
ax^2 .... kvadratický člen
bx .... lineární člen
c .... absolutní člen

Neúplné kvadratické rovnice:

Ryze kvadratická rovnice

$b = 0$

$ax^2 + c = 0$

Řešení:

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Př.:

①
$$4x^2 - 25 = 0$$
$$4x^2 = 25$$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$x = \pm\frac{5}{2}$$

②
$$3 + x = 1 + \frac{4}{x-2} \quad \Big|\cdot(x-2)$$
$$(3+x)(x-2) = 1(x-2) + \frac{4(x-2)}{(x-2)}$$
$$3x - 6 + x^2 - 2x = x - 2 + 4$$
$$x^2 + x - 6 = x + 2$$
$$x^2 + x - 6 - x - 2 = 0$$
$$x^2 - 8 = 0$$
$$x^2 = 8$$
$$x = \pm\sqrt{8}$$
$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

$c = 0$

$ax^2 + bx = 0$

Řešení:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad ax_2 + b = 0$$
$$ax_2 = -b$$
$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Př.:

①

$$4x^2 - 9x = 0$$
$$x(4x - 9) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad 4x_2 - 9 = 0$$
$$4x_2 = 9$$
$$x_2 = \frac{9}{4}$$

②

$$\frac{3x+5}{4x-3} = \frac{4x-5}{3x+3} \quad \Big|\cdot(4x-3)(3x+3)$$
$$\frac{(3x+5)(4x-3)(3x+3)}{4x-3} = \frac{(4x-5)(4x-3)(3x+3)}{3x+3}$$
$$(3x+5)(3x+3) = (4x-5)(4x-3)$$
$$9x^2 + 9x + 15x + 15 = 16x^2 - 12x - 20x + 15$$
$$9x^2 + 24x + 15 = 16x^2 - 32x + 15$$
$$9x^2 + 24x + 15 - 16x^2 + 32x - 15 = 0$$
$$-7x^2 + 56x = 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$
$$7x^2 - 56x = 0$$
$$x(7x - 56) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad 7x_2 - 56 = 0$$
$$7x_2 = 56$$
$$x_2 = \frac{56}{7}$$
$$x_2 = 8$$

Podmínky pro zlomky:

$4x - 3 \neq 0 \qquad 3x + 3 \neq 0$

$4x \neq 3 \qquad 3x \neq -3$

$x \neq \frac{3}{4} \qquad x \neq -1$

Úplná kvadratická rovnice:

$a, b, c \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

Metody řešení:

1) $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$ ...... diskriminant

$D > 0$ 2 řešení (kořeny)
$D = 0$ 1 řešení (dvojnásobný kořen)
$D < 0$ 2 řešení (komplexně sdružená čísla)

2) $x^2 + px + q = 0$ ...... normalizovaný tvar (a = 1)

$x_1 \cdot x_2 = q$

$x_1 + x_2 = -p$

Rovnice nemá normalizovaný tvar:

$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

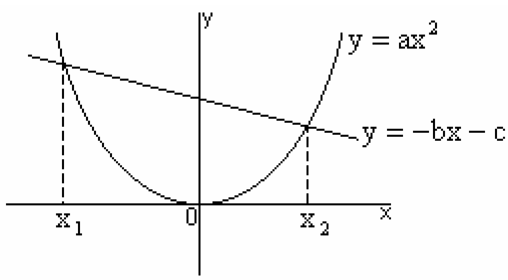
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

3) grafická metoda:

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 = -bx - c$

$y = ax^2 \quad y = -bx - c$



Př.:

$$2x^2+3x+1=0$$

1) $2x^2+3x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{-3\pm 1}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{-3-1}{4}=-\frac{4}{4}=-1\\ \frac{-3+1}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

2) $2x^2+3x+1=0 \quad |:2$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}=\left(-\frac{2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2}=\frac{-2-1}{2}=\left(-\frac{2}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

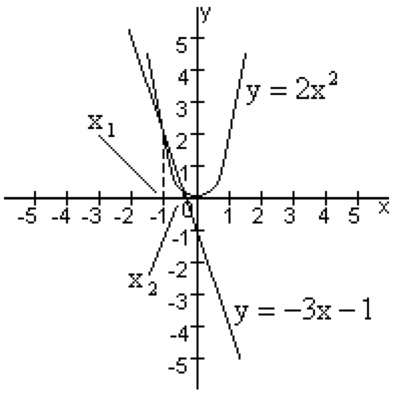
3) $2x^2+3x+1=0$

$$2x^2=-3x-1$$

$$y=2x^2 \quad y=-3x-1$$

$$x_1=-1$$

$$x_2=-\frac{1}{2}$$



KVADRATICKÁ ROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Př.:

$|x^2+2x-1|-x-1=0$

nulové body:

$x_0^2+2x_0-1=0$

$$x_{01,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(-1\pm\sqrt{2}\right)}{2}=-1\pm\sqrt{2}=\left\langle\begin{array}{l}-1-\sqrt{2}\\-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

	$\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right\rangle$	$\left\langle-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right\rangle$	$\left\langle-1+\sqrt{2};\infty\right)$
$|x^2+2x-1|$	x^2+2x-1	$-x^2-2x+1$	x^2+2x-1
	$x^2+2x-1-x-1=0$	$-x^2-2x+1-x-1=0$	$x^2+2x-1-x-1=0$
	$x^2+x-2=0$	$-x^2-3x=0$	$x^2+x-2=0$
	$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$	$x(-x-3)=0$	$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$
	$=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=$	$x_1=0 \quad -x_2-3=0$ $-3=x_2$	$=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=$
	$=\left\langle\begin{array}{l}\frac{-1+3}{2}=1\\\frac{-1-3}{2}=-2\end{array}\right.$		$=\left\langle\begin{array}{l}\frac{-1+3}{2}=1\\\frac{-1-3}{2}=-2\end{array}\right.$
vyhovující kořeny (podle intervalů)	$P_1=\emptyset$	$P_2=\{0\}$	$P_3=\{1\}$

$P=P_1\cup P_2\cup P_3=\{0;1;\}$

13. Kvadratické nerovnice

Metody řešení:

1) početně
2) graficky

Př.:

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

1) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$

$$x_1 \cdot x_2 = -15 = 3 \cdot (-5)$$
$$x_1 + x_2 = 2 = 3 - 5$$
$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$$

$$(x-5)(x+3) \geq 0$$

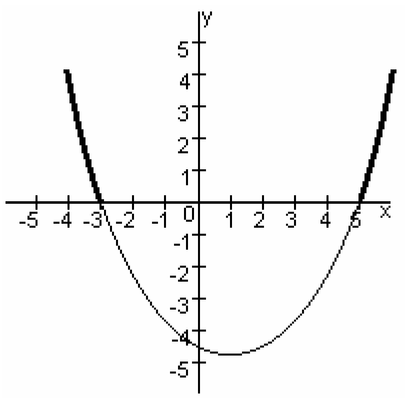
$$\begin{array}{ll} x - 5 \geq 0 & x - 5 \leq 0 \\ \underline{x + 3 \geq 0} & \underline{x + 3 \leq 0} \\ x \geq 5 & x \leq 5 \\ \underline{x \geq -3} & \underline{x \leq -3} \\ P_1 = \langle -5; \infty) & P_2 = (-\infty; -3\rangle \end{array}$$

$$P = P_1 \cup P_2 = (-\infty; -3\rangle \cup \langle -5; \infty)$$

2) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{2+8}{2} = 5 \\ \frac{2-8}{2} = -3 \end{array} \right.$$

a > 0............ parabola otevřená nahoru



$$P = P_1 \cup P_2 = (-\infty; -3\rangle \cup \langle -5; \infty)$$

KVADRATICKÉ NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Př.:

$$\left|x^2 - 2x - 3\right| < x + 1$$

nulové body:

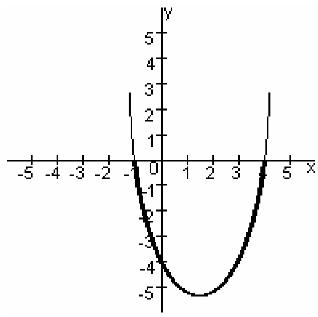
$$x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$$

$$x_{01,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{array}\right.$$

	$(-\infty;-1\rangle$	$\langle -1;3\rangle$	$\langle 3;\infty)$
$\left\|x^2 - 2x - 3\right\|$	$x^2 - 2x - 3$	$-x^2 + 2x + 3$	$x^2 - 2x - 3$

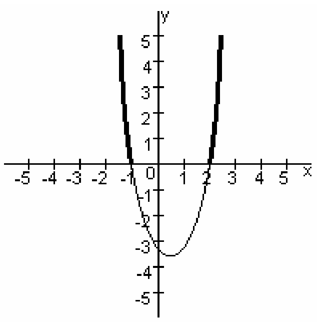
Interval $(-\infty;-1\rangle$:

$$x^2 - 2x - 3 < x + 1$$
$$x^2 - 2x - x - 3 - 1 < 0$$
$$x^2 - 3x - 4 < 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array}\right.$$



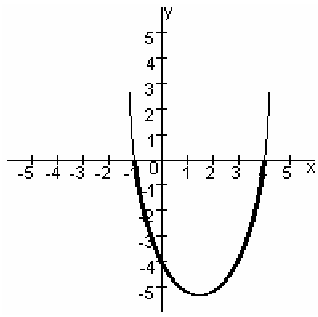
Interval $\langle -1;3\rangle$:

$$-x^2 + 2x + 3 < x + 1$$
$$-x^2 + 2x - x + 3 - 1 < 0$$
$$-x^2 + x + 2 < 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$
$$x^2 - x - 2 > 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{array}\right.$$

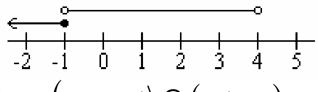


Interval $\langle 3;\infty)$:

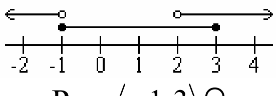
$$x^2 - 2x - 3 < x + 1$$
$$x^2 - 2x - x - 3 - 1 < 0$$
$$x^2 - 3x - 4 < 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array}\right.$$



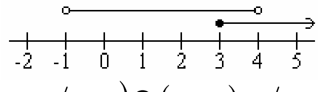
vyhovující kořeny (podle intervalů)



$$P_1 = (-\infty;-1\rangle \cap (-1;\infty) = \emptyset$$



$$P_2 = \langle -1;3\rangle \cap \big((-\infty;-1) \cup (2;\infty)\big) = (2;3\rangle$$



$$P_3 = \langle 3;\infty) \cap (-1;4) = \langle 3;4)$$

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = (2;4)$$

14. Iracionální rovnice

Rovnice s neznámou pod odmocninou.

Postup řešení:

1. podmínky
2. řešení (zbavení se odmocniny)
3. zkouška

Př.:

① $\sqrt{2(x-3)} = 3 - x$

podmínky:

$$2(x-3) \geq 0$$
$$2x - 6 \geq 0$$
$$2x \geq 6$$
$$x \geq 3$$

řešení:

$$\sqrt{2(x-3)} = 3 - x \quad \Big|^{2}$$
$$\left(\sqrt{2(x-3)}\right)^2 = (3-x)^2$$
$$2(x-3) = 9 - 6x + x^2$$
$$2x - 6 = 9 - 6x + x^2$$
$$0 = x^2 - 8x + 15$$
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{8+2}{2} = 5 \\ \frac{8-2}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Oba výsledky vyhovují podmínce.

zkouška:

$$\sqrt{2(x-3)} = 3 - x \qquad \sqrt{2(x-3)} = 3 - x$$
$$\sqrt{2(3-3)} = 3 - 3 \qquad \sqrt{2(5-3)} = 3 - 5$$
$$0 = 0 \qquad \sqrt{4} = -2$$
$$2 \neq -2$$

Zkoušce vyhovuje pouze jeden výsledek.

$$P = \{3\}$$

② $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$

podmínky:

$2x+5 \geq 0 \quad x-1 \geq 0$

$2x \geq -5 \qquad x \geq 1$

$x \geq -\frac{5}{2}$

řešení:

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 \quad \Big|^2$$
$$2x+5+2\sqrt{(2x+5)(x-1)}+x-1=64$$
$$3x+4+2\sqrt{(2x+5)(x-1)}=64$$
$$2\sqrt{(2x+5)(x-1)}=60-3x \quad \Big|^2$$
$$4(2x+5)(x-1)=3600-360x+9x^2$$
$$4\left(2x^2-2x+5x-5\right)=3600-360x+9x^2$$
$$4\left(2x^2+3x-5\right)=3600-360x+9x^2$$
$$8x^2+12x-20=3600-360x+9x^2$$
$$0=9x^2-8x^2-360x-12x+3600+20$$
$$0=x^2-372x+3620$$
$$x_{1,2}=\frac{372\pm\sqrt{372^2-4\cdot1\cdot3620}}{2\cdot1}=\frac{372\pm\sqrt{138384-14480}}{2}=\frac{372\pm\sqrt{123904}}{2}=\frac{372\pm352}{2}=$$
$$=\left\langle \begin{array}{l} \frac{372+352}{2}=362 \\ \frac{372-352}{2}=10 \end{array}\right.$$

Oba výsledky vyhovují podmínce.

zkouška:

$$\begin{array}{cc} \sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 & \sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 \\ \sqrt{2\cdot362+5}+\sqrt{362-1}=8 & \sqrt{2\cdot10+5}+\sqrt{10-1}=8 \\ \sqrt{724+5}+\sqrt{361}=8 & \sqrt{20+5}+\sqrt{9}=8 \\ \sqrt{729}+19=8 & \sqrt{25}+3=8 \\ 27+19=8 & 5+3=8 \\ 46\neq8 & 8=8 \end{array}$$

Zkoušce vyhovuje pouze jeden výsledek.

$P=\{10\}$

③ $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$

řešení:

$$\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1 \quad \Big|^2$$
$$4x^2-\sqrt{8x+5}=4x^2+4x+1$$
$$4x^2-4x^2-4x-1=\sqrt{8x+5}$$
$$-4x-1=\sqrt{8x+5} \quad \Big|^2$$
$$16x^2+8x+1=8x+5$$
$$16x^2+8x-8x+1-5=0$$
$$16x^2-4=0$$
$$16x^2=4$$
$$x^2=\frac{4}{16}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{4}{16}}$$
$$x=\pm\frac{2}{4}$$
$$x=\pm\frac{1}{2}$$

zkouška:

$\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$	$\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$
$\sqrt{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5}}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1$	$\sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{8\cdot\frac{1}{2}+5}}=2\cdot\frac{1}{2}+1$
$\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-\sqrt{-\frac{8}{2}+5}}=-\frac{2}{2}+1$	$\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{8}{2}+5}}=\frac{2}{2}+1$
$\sqrt{\frac{4}{4}-\sqrt{-4+5}}=-1+1$	$\sqrt{\frac{4}{4}-\sqrt{4+5}}=1+1$
$\sqrt{1-\sqrt{1}}=0$	$\sqrt{1-\sqrt{9}}=2$
$\sqrt{1-1}=0$	$\sqrt{1-3}=2$
$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{-2}=2$
$0=0$	NŘ

Zkoušce vyhovuje pouze jeden výsledek.

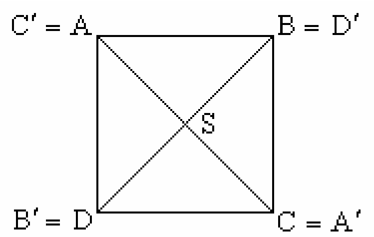
$$P=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

15. Shodná zobrazení – konstrukční úlohy

***Shodné zobrazení (shodnost) v rovině je každé zobrazení v rovině, které má tu vlastnost, že pro libovolné body** A,B **této roviny a jejich obrazy** A', B' **platí, že:** $|AB| = |A'B'|$.*

Samodružný bod – bod, který se zobrazí sám na sebe ($A = A'$).
Samodružný útvar – každý útvar, jehož obraz v daném zobrazení je týž útvar.

Př.:

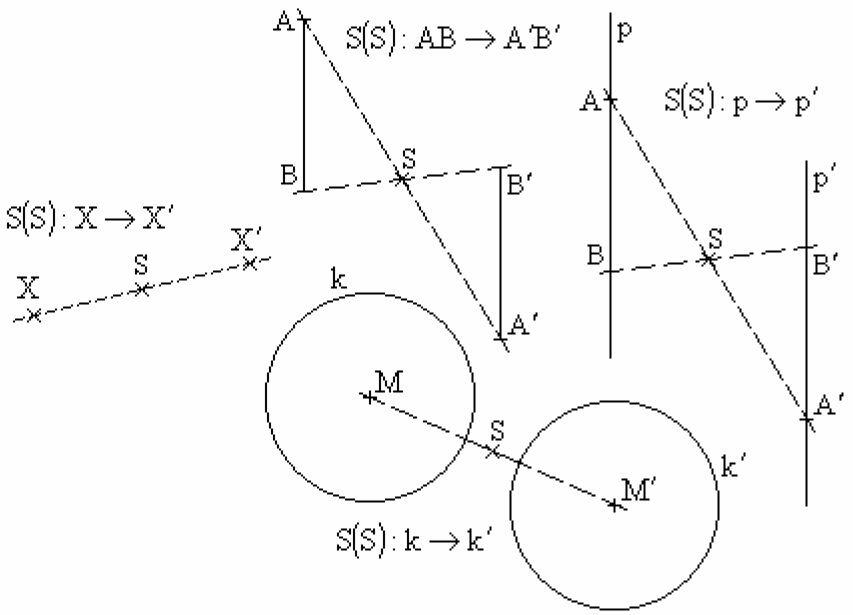


Klasifikace shodnosti:

Identita Zobrazení, ve kterém se každý bod zobrazí sám na sebe.

Středová souměrnost Zobrazení v rovině, v němž každý její bod X se pomocí daného bodu S (střed), ležícího v této rovině zobrazí na svůj obraz X’ takto:

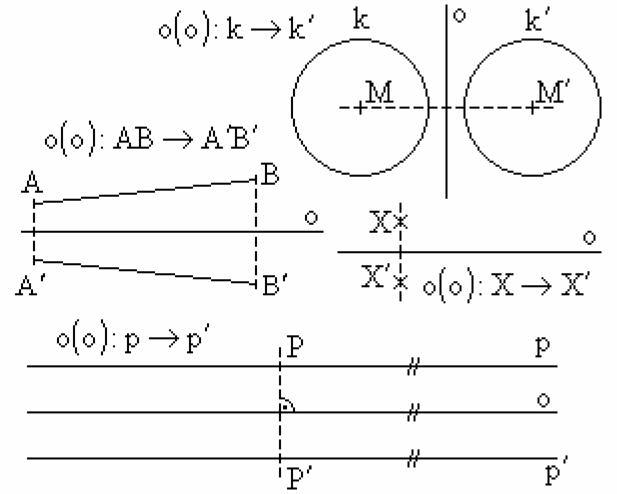
1. $X = S \Rightarrow X = S = X'$
2. $X \neq S \Rightarrow X$ je koncový bod úsečky XX’, kde bod S je jejím středem



Osová souměrnost

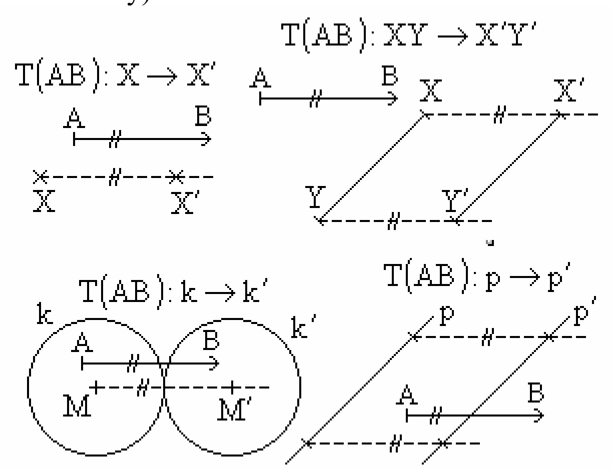
Zobrazení v rovině, v němž každý její bod X je pomocí dané přímky o (osa) ležící v této rovině zobrazen na svůj obraz X' takto:

1. $X \in o \rightarrow X = X'$
2. $X \notin o \rightarrow X'$ je koncový bod úsečky XX', jejíž osou je přímka o



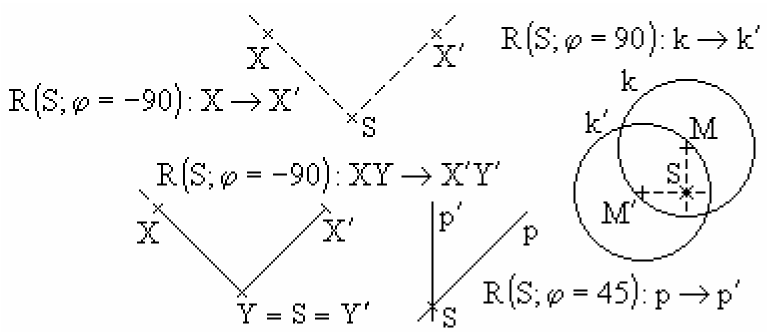
Posunutí (translace)

Je dána orientovaná úsečka AB. Posunutí je shodné zobrazení, které každému X přiřadí X' takové, že orientované úsečky XX' a AB mají stejnou délku i směr (jsou souhlasně orientovány).



Otočení (rotace)

Otočení je shodné zobrazení, které přiřazuje každému bodu $X \neq S$ bod X' takový, že velikost $|XS| = |X'S|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ.



SHODNOST TROJÚHELNÍKU

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

věta **sss**	věta **sus**	věta **usu**	věta **Ssu**
$\lvert AB\rvert = \lvert A'B'\rvert$	$\lvert AB\rvert = \lvert A'B'\rvert$	$\lvert AB\rvert = \lvert A'B'\rvert$	$\lvert AC\rvert = \lvert A'C'\rvert$
$\lvert BC\rvert = \lvert B'C'\rvert$	$\lvert AC\rvert = \lvert A'C'\rvert$	$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$	$\lvert BC\rvert = \lvert B'C'\rvert$
$\lvert AC\rvert = \lvert A'C'\rvert$	$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$	$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$	$\lvert BC\rvert > \lvert AC\rvert$
			$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$

Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují

věta **sss**	věta **sus**	věta **usu**	věta **Ssu**
ve všech třech stranách	ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném	ve straně a v úhlech k ní přilehlých	ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich

Konstrukční úlohy:

1. rozbor
2. popis konstrukce
3. konstrukce

16. Podobná zobrazení – konstrukční úlohy

Podobností nazýváme každé zobrazení v rovině takové, že existuje reálné číslo $k > 0$ ***tak, že pro libovolné body*** A, B ***dané roviny a jejich obrazy*** A', B' ***platí:*** $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

k .... poměr podobnosti
$k = 1$ ..... shodné zobrazení $|A'B'| = |AB|$

Dva geometrické útvary jsou podobné právě tehdy, když existuje podobné zobrazení, v němž jeden útvar je obrazem druhého.

PODOBNOST TROJÚHELNÍKU

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

věta **sss**	věta **sus**	věta **uu**
$\lvert AB\rvert = k \cdot \lvert A'B'\rvert$	$\lvert AB\rvert = k \cdot \lvert A'B'\rvert$	$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$
$\lvert BC\rvert = k \cdot \lvert B'C'\rvert$	$\lvert AC\rvert = k \cdot \lvert A'C'\rvert$	$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$
$\lvert AC\rvert = k \cdot \lvert A'C'\rvert$	$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$	

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se shodují

věta **sss**	věta **sus**	věta **uu**
ve všech poměrech velikostí sobě odpovídajících stran	v jednom úhlu a v poměru velikostí sobě odpovídajících stran ležících na jeho ramenech	ve dvou úhlech

Př.:

① Je dán trojúhelník ABC $\left(a = \frac{8}{3}\text{cm}; b = \frac{7}{3}\text{cm}; \gamma = 55°\right)$ a trojúhelník $A'B'C'$ $\left(a' = 4\text{cm}; b' = \frac{7}{2}\text{cm}; \gamma' = 55°\right)$. Jsou tyto dva trojúhelníky podobné?

Příklad se řeší podle věty **sus**.

$\gamma \cong \gamma'$

$$k_a = \frac{a'}{a} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$k_b = \frac{b'}{b} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{3}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{2}$$

$k_a = k_b$

Trojúhelníky jsou podobné.

② Je dán trojúhelník ABC $(a = 162\text{m}; b = 117{,}5\text{m}; c = 180\text{m})$ a trojúhelník $A'B'C'$ $(a' = 6{,}5\text{mm}; b' = 4{,}7\text{mm}; c' = 7{,}2\text{mm})$. Jsou tyto dva trojúhelníky podobné?

Příklad se řeší podle věty **sss**.

$$k_a = \frac{a'}{a} = \frac{162500}{6{,}5} = 25000$$

$$k_b = \frac{b'}{b} = \frac{117500}{4{,}7} = 25000$$

$$k_c = \frac{c'}{c} = \frac{180000}{7{,}2} = 25000$$

$$k_a = k_b = k_c$$

Trojúhelníky jsou podobné.

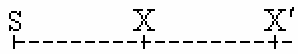
STEJNOLEHLOST

Je dán bod* S *a reálné číslo* $\lambda \neq 0$*. Stejnolehlost se středem* S *a koeficientem* λ *je zobrazení, které přiřazuje:

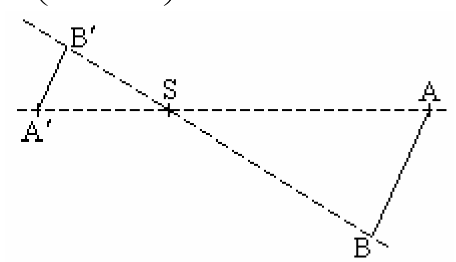
1) $X \neq S \Rightarrow X'$ tak, že $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$
   $\lambda > 0 \Rightarrow X'$ leží na polopřímce SX
   $\lambda < 0 \Rightarrow X'$ leží na polopřímce opačné k polopřímce SX
2) $S = X \Rightarrow X' = X = S$

Př.:

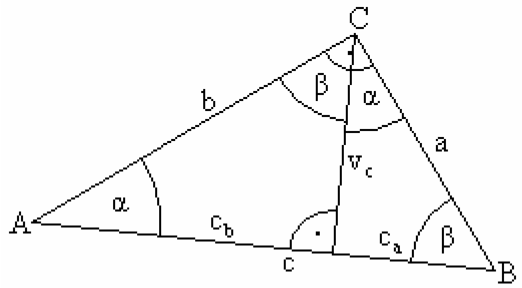
① $H(S; \lambda = 2): X \rightarrow X'$



② $H\left(S; \lambda = -\frac{1}{2}\right): AB \rightarrow A'B'$



17. Pythagorova a Eukleidovy věty – konstrukční úlohy

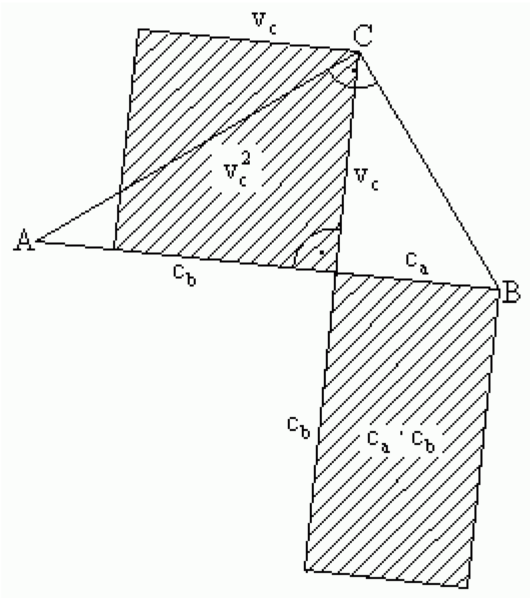


Platí pouze v pravoúhlém trojúhelníku.

a, b........odvěsny
c............přepona
c_a, c_b......úseky přepony

EUKLEIDOVA VĚTA O VÝŠCE

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků přepony.

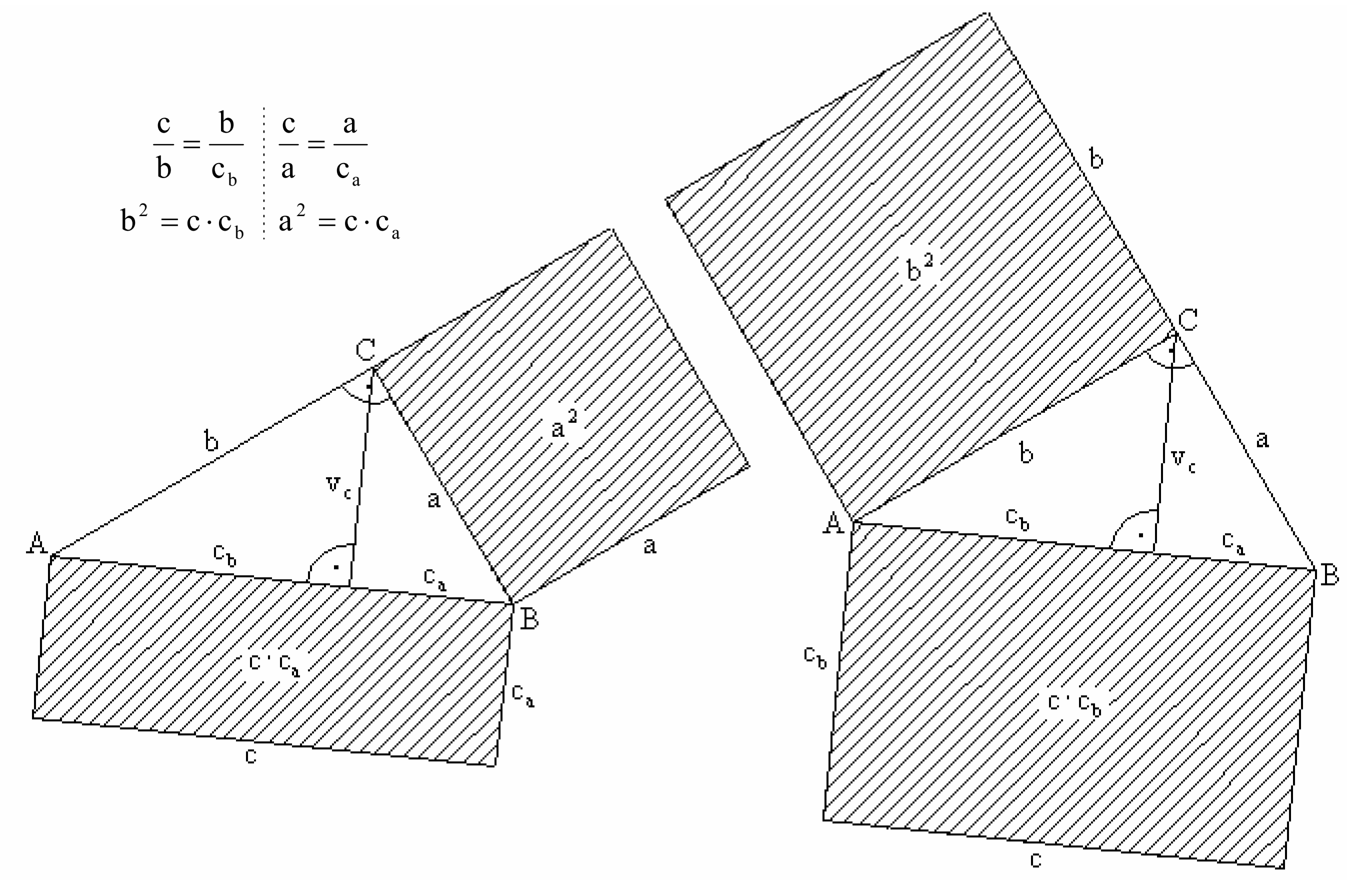


$$\frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c}$$

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

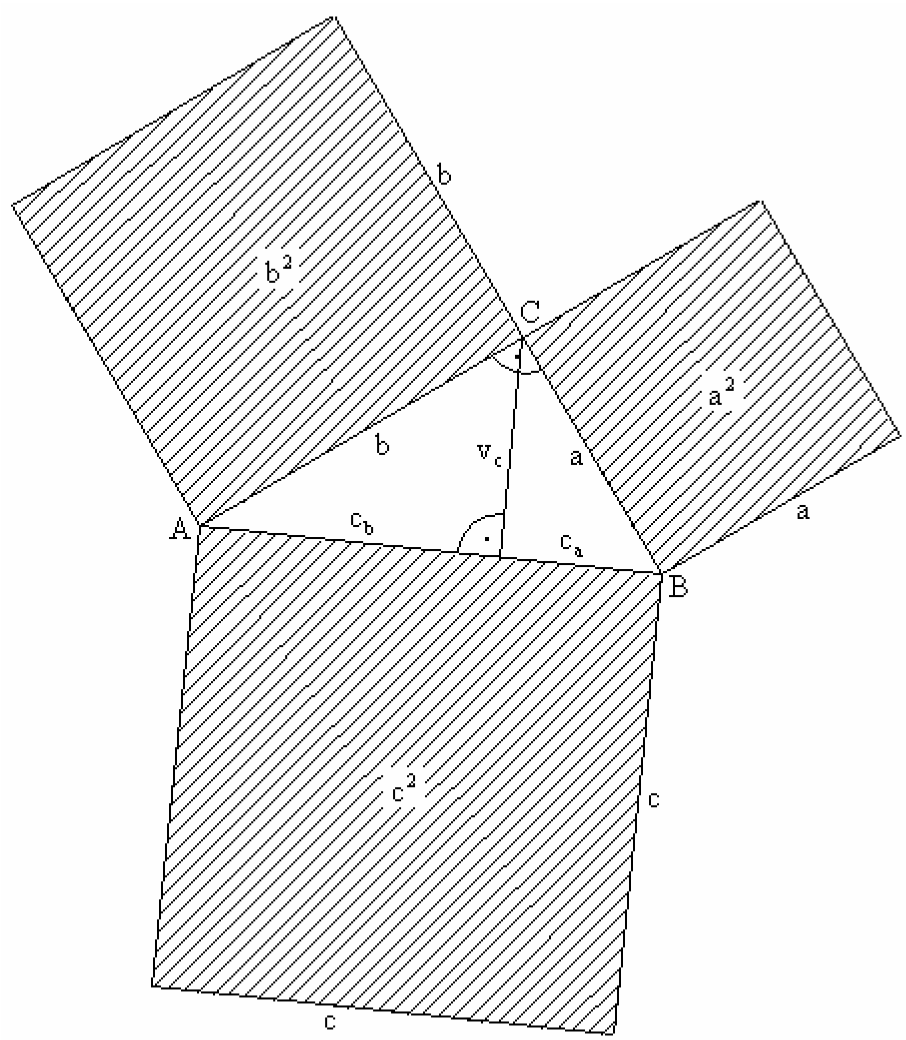
EUKLEIDOVA VĚTA O ODVĚSNĚ

Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé.



PYTHAGOROVA VĚTA

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.



$$c_a + c_b = c$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= c \cdot c_a \\ b^2 &= c \cdot c_b \end{aligned}\right] +$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$$

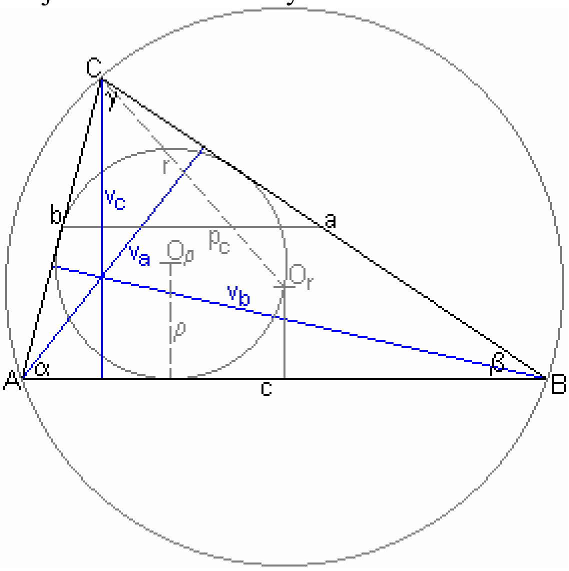
$$a^2 + b^2 = c\underbrace{(c_a + c_b)}_{c}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

18. Obvody a obsahy rovinných obrazců

o .... obvod
S .... obsah
u .... úhlopříčka
v .... výška
p .... střední příčka
r .... poloměr kružnice opsané
ρ .... poloměr kružnice vepsané
O_r ...... střed kružnice opsané
O_ρ ...... střed kružnice vepsané

Trojúhelník různostranný



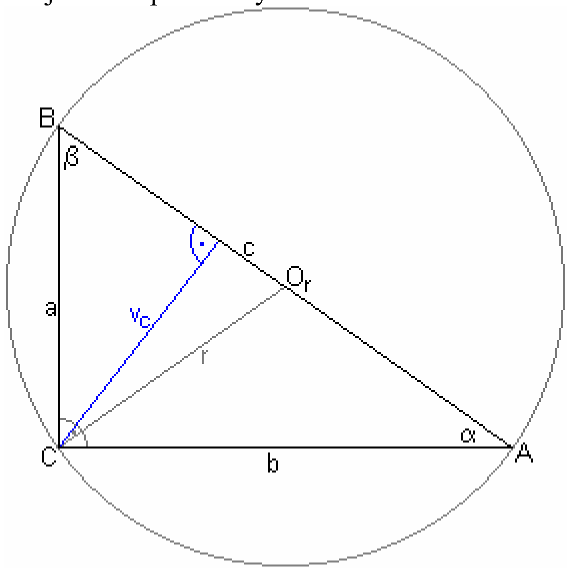
$$o = a + b + c \qquad s = \frac{o}{2}$$

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$S = \frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma = \frac{bc}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{ac}{2}\cdot\sin\beta$$

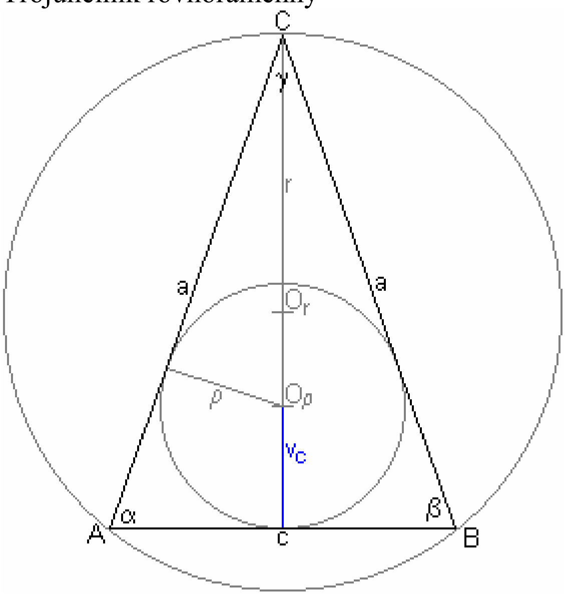
Trojúhelník pravoúhlý



$$o = a + b + c$$

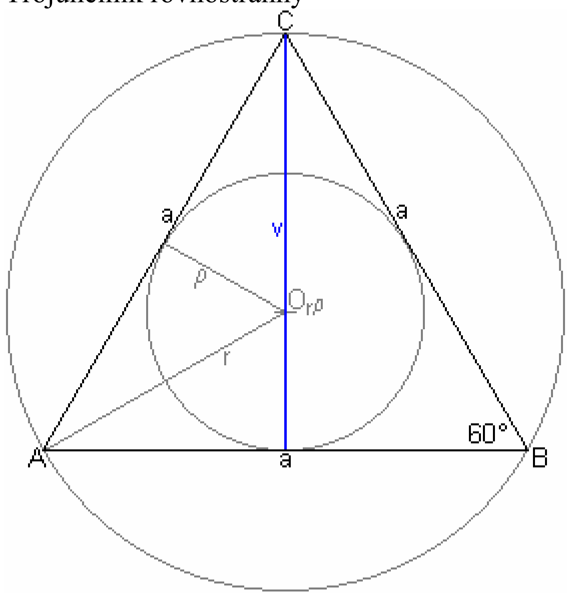
$$S = \frac{ab}{2}$$

Trojúhelník rovnoramenný



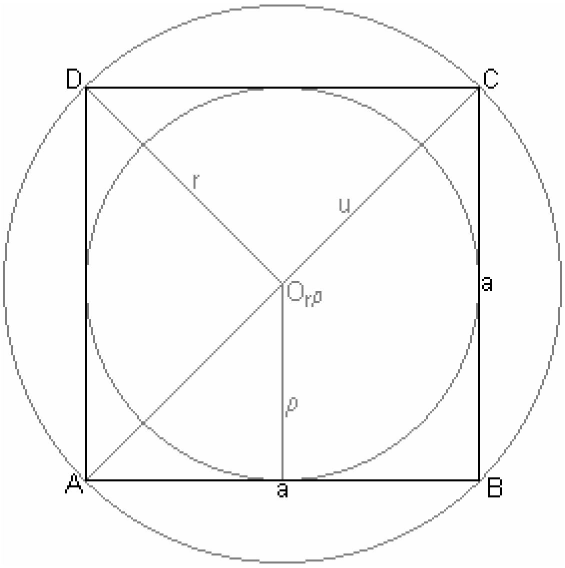
$$o = 2a + c \qquad S = \frac{cv_c}{2}$$

Trojúhelník rovnostranný



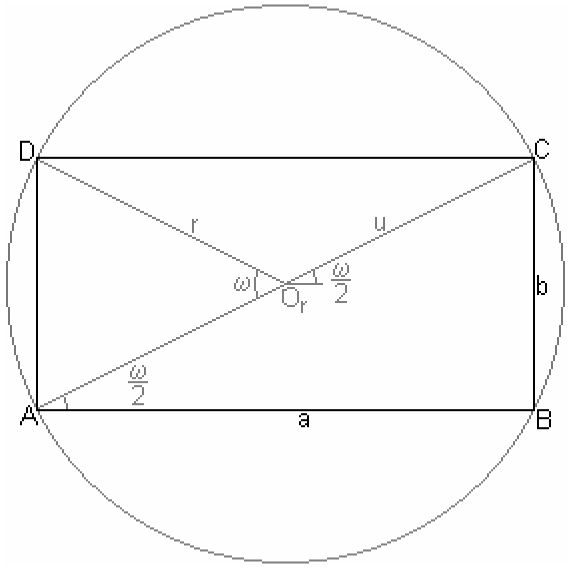
$$o = 3a \qquad S = \frac{av}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{v^2}{3}\sqrt{3}$$

Čtverec



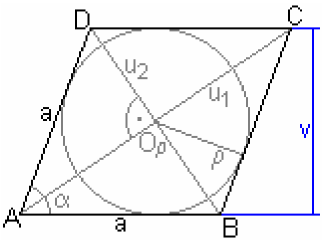
$o = 4a \qquad S = a^2 = \dfrac{u^2}{2}$

Obdélník



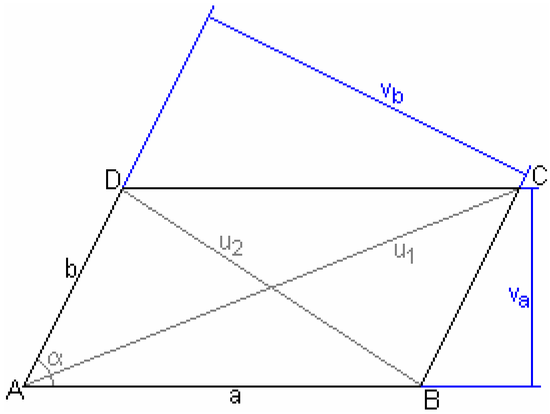
$o = 2(a + b) \qquad S = ab$

Kosočtverec



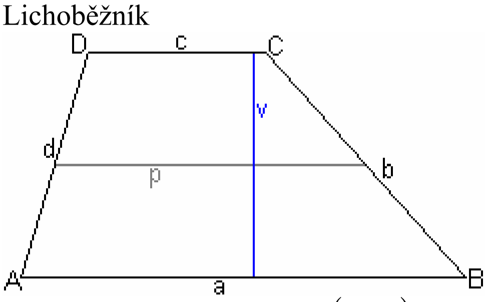
$o = 4a \qquad S = av = a^2 \cdot \sin\alpha = \dfrac{u_1 u_2}{2}$

Kosodélník



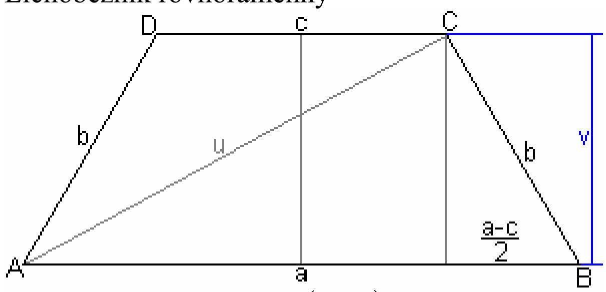
$o = 2(a + b) \qquad S = av_a = bv_b = ab \cdot \sin\alpha$

Lichoběžník



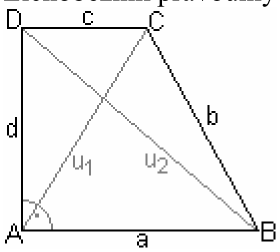
$o = a + b + c + d \qquad S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2}$

Lichoběžník rovnoramenný



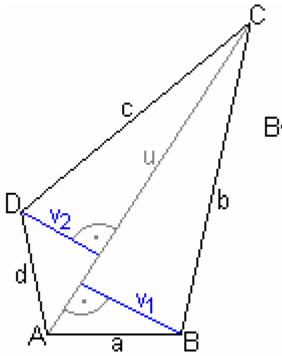
$o = a + 2b + c \qquad S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2}$

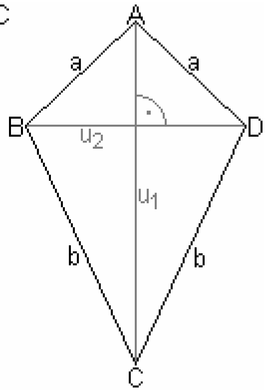
Lichoběžník pravoúhlý



$$o = a + b + c + d \qquad S = \frac{(a+c)\cdot v}{2} = \frac{(a+c)\cdot d}{2}$$

Různoběžník Deltoid





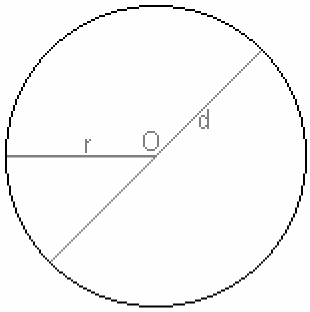
různoběžník:

$$o = a + b + c + d \qquad S = \frac{u\cdot(v_1 + v_2)}{2}$$

deltoid:

$$o = 2(a+b) \qquad S = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

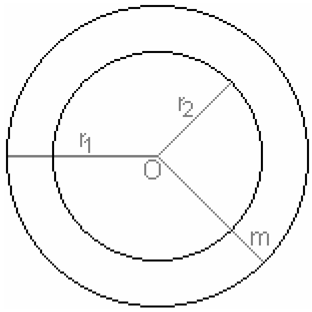
Kružnice



$$o = 2\pi\cdot r$$

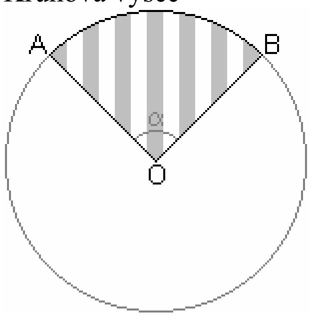
$$S = \pi\cdot r^2 = \frac{\pi\cdot d^2}{4}$$

Mezikruží



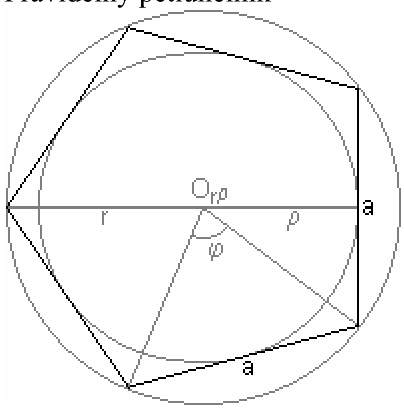
$$S = \pi\cdot(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

Kruhová výseč



$$S = \frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha$$

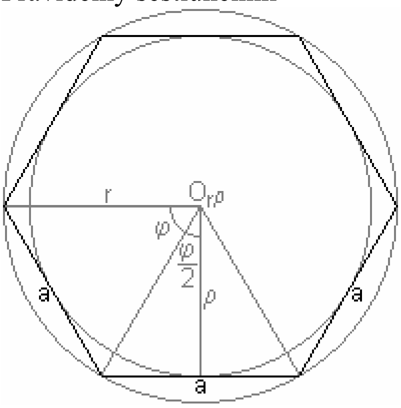
Pravidelný pětiúhelník



$$o = 5a$$

$$S = \frac{5}{2}a\rho$$

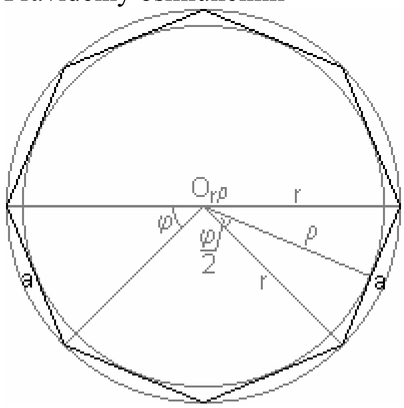
Pravidelný šestiúhelník



$$o = 6a$$

$$S = \frac{3r^2}{2} \cdot \sqrt{3}$$

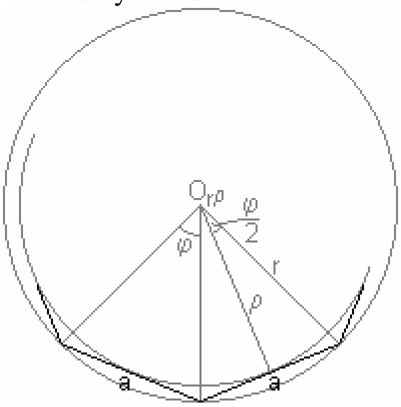
Pravidelný osmiúhelník



$$o = 8a$$

$$S = 4a\rho$$

Pravidelný n-úhelník



$$o = na$$

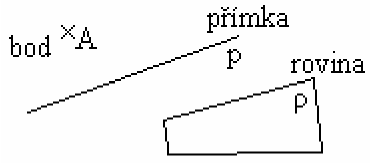
$$S = \frac{o\rho}{2}$$

19. Polohové a metrické vztahy základních geometrických útvarů v prostoru

STEREOMETRIE

Část geometrie, která se zabývá studiem geometrických útvarů v prostoru.

Základní geometrické útvary:



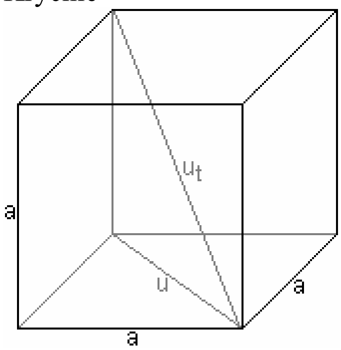
Přímka je určena dvěma různými body.

Rovina je určena třemi různými body neležícími v jedné přímce.

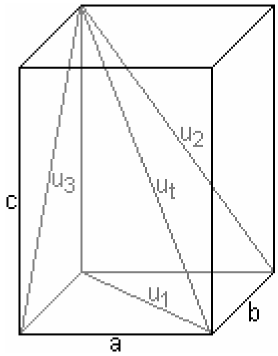
Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem opačné poloprostory a je jejich hraniční rovinou.

Tělesa:

Krychle



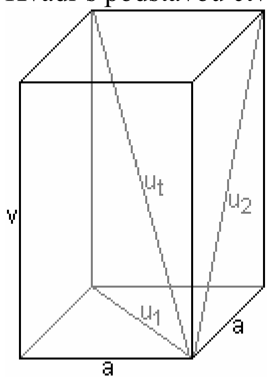
Kvádr



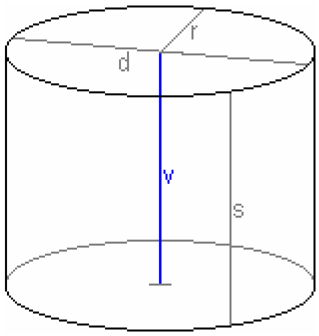
Pravidelný n-boký hranol

Hranol s podstavou pravidelného n-úhelníku (např. kvádr s podstavou čtverce nebo hranol s podstavou pravidelného osmiúhelníku).

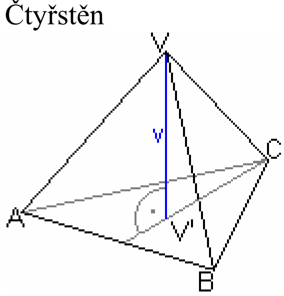
Kvádr s podstavou čtverce



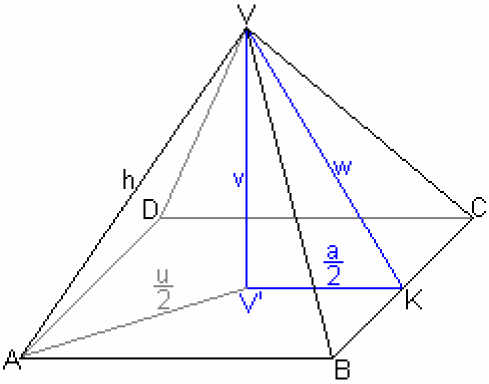
Rotační válec



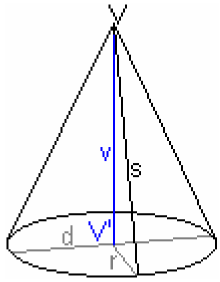
Čtyřstěn



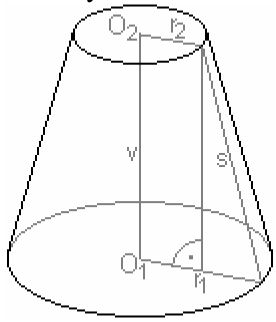
Jehlan



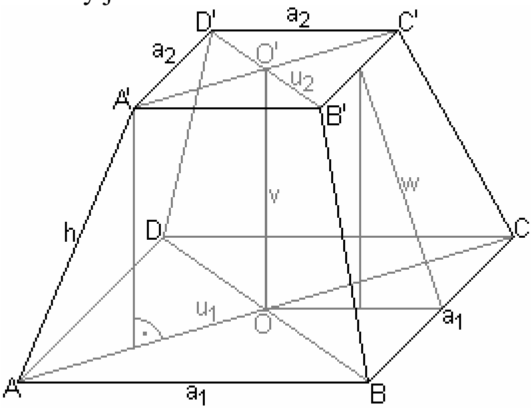
Rotační kužel



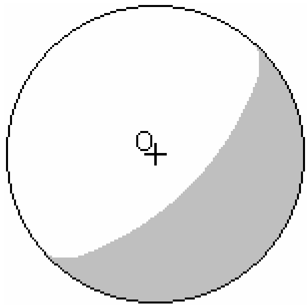
Komolý kužel



Komolý jehlan



Koule

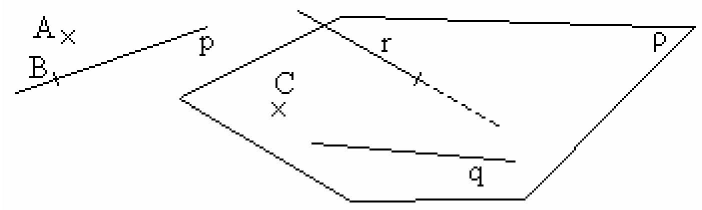


POLOHOVÉ VZTAHY

Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami:

$\subset$, $\in$ ...... je incidentní (leží na)

$\not\subset$, $\notin$ ...... není incidentní (neleží na)



$A \notin p; q; r$

$A \not\subset \rho$

$B \in p$

$B \notin q; r$

$B \not\subset \rho$

$C \notin p; q; r$

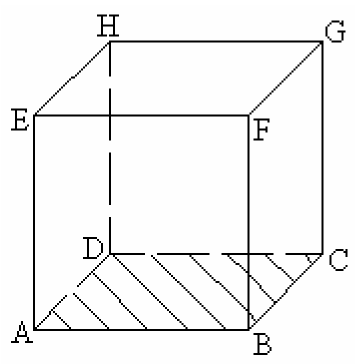
$C \subset \rho$

$p; r \not\subset \rho$

$q \subset \rho$

Přímka leží v rovině, leží-li v rovině alespoň dva její body.

Př.:



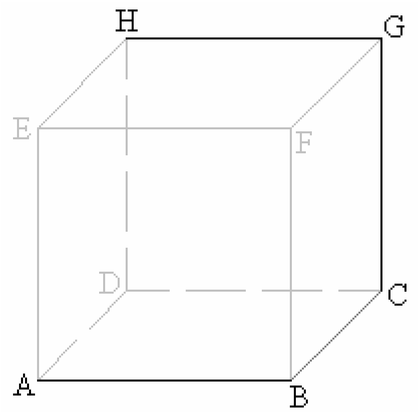
Urči spodní rovinu krychle.

Pomocí bodů:
ABC; BCD; CDA; DAB; ABD; BCA; CDB; DAC

Pomocí přímek:
AB, CD; BC, DA; AB, BC; BC, CD; CD, DA; DA, AB; AB, BD; AB, AC; BC, CA; BC, BD; CD, CA; CD, DB; DA, AC; DA, BD

Pomocí přímky a bodu:
AB, C; AB, D; BC, D; BC, A; CD, A; CD, B; DA, B; DA, C; AC, B; AC, D; BD, A; BD, C

Vzájemná poloha dvou přímek:



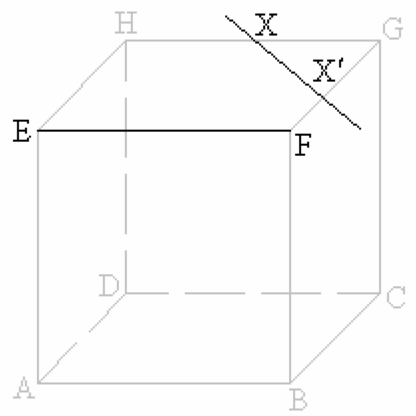
Rovnoběžné
- různé (AB, GH)
- splývající (totožné; AB, BA)

Různoběžné (CG, GH)

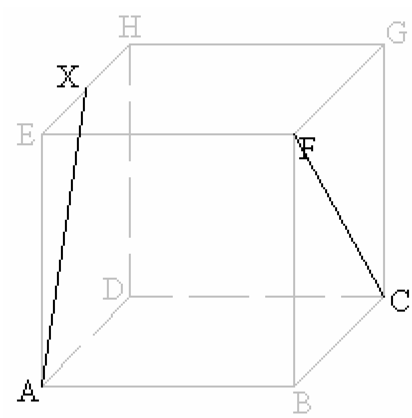
Mimoběžné – neleží v jedné rovině a nemají žádný společný bod (AB, CG).

Příčka mimoběžek – přímka, která obě mimoběžky protíná a je na ně kolmá (BC).

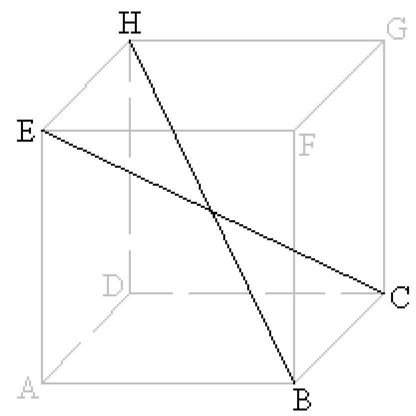
Př.:



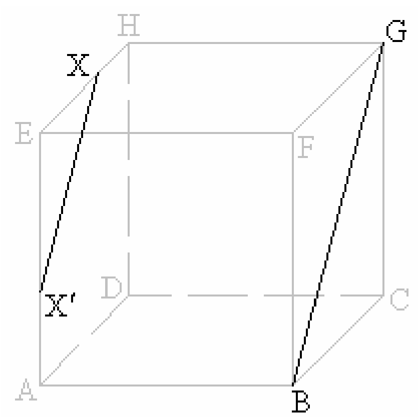
různoběžné (společná rovina EFG)

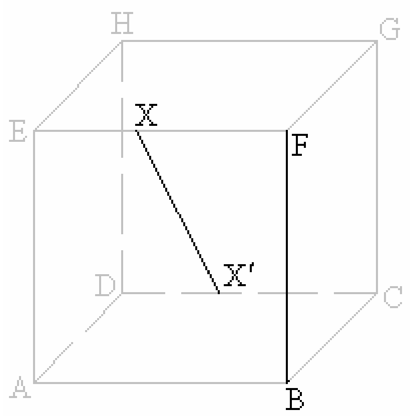


mimoběžné



různoběžné (společná rovina BCE)





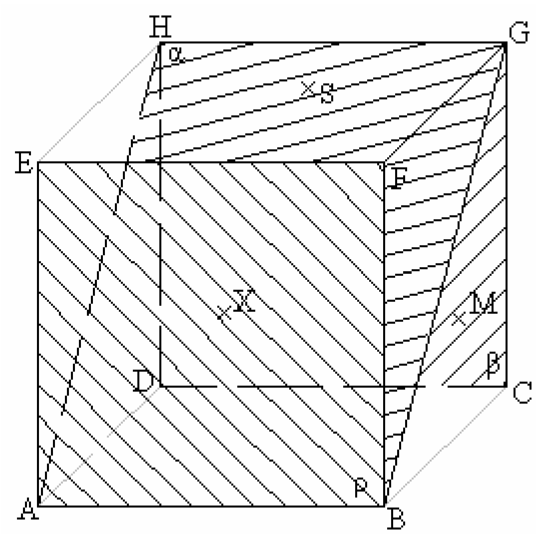
rovnoběžné (společná rovina BGX)   mimoběžné

Vzájemná poloha dvou rovin:

O dvou různých rovinách, které mají společnou přímku říkáme, že jsou různoběžné a tato přímka je jejich průsečnice.

Nemají-li dvě roviny žádný společný bod, nazýváme je rovnoběžné.

Mají-li roviny všechny body společné, nazýváme je splývající (totožné).



$\rho = ABF; \alpha = ABG; \beta = CDG$

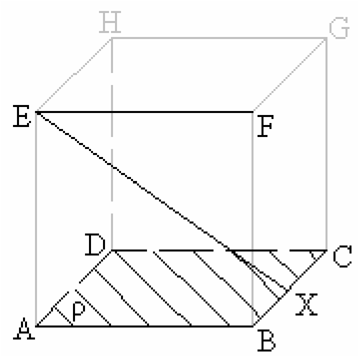
$X \subset \rho; S \subset \alpha; M \subset \beta$

AB – průsečnice rovin ρ a α
GH – průsečnice α a β

$\rho \| \beta$ – rovnoběžné

vrstva – průnik v poloprostoru ρ a β
šířka (tloušťka) vrstvy – vzdálenost hraničních rovin ρ a β ($|BC|$)
klín – průnik poloprostoru ρ a α
hrana klínu – průsečnice hraničních rovin ρ a α (AB)

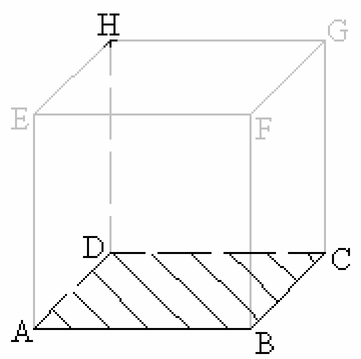
Vzájemná poloha přímky a roviny:



Rovnoběžné
- různé (EX, ρ) – nemají žádný společný bod
- splývající (totožné; AB, ρ) – mají všechny body společné

Různoběžné (EX, ρ) – mají společný jediný bod (průsečík; X)

Př.:

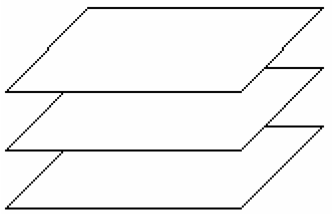


Urči všechny přímky, které procházejí bodem H a jsou s rovinou ABC:

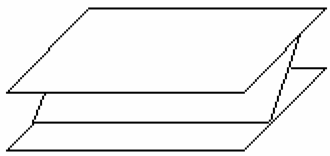
a) rovnoběžné rúzné
b) různoběžné

a) HE, HF, HG
b) HA, HB, HC, HD

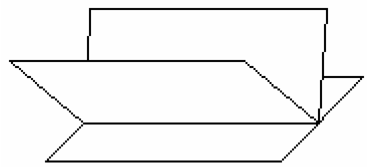
Vzájemná poloha tří rovin:



rovnoběžné

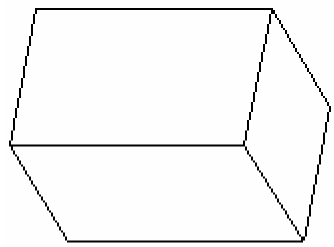


2 rovnoběžné, třetí různoběžná



různoběžné (1 průsečnice)

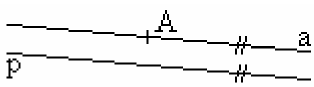
různoběžné (3 průsečnice)



různoběžné (1 bod)

Rovnoběžnost přímky a roviny:

Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.



Kritérium rovnoběžnost přímky a roviny:

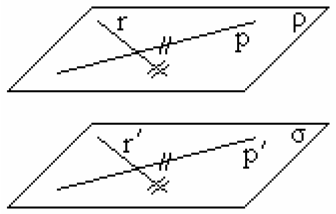
$p' \subset \rho$

Přímka p ***je rovnoběžná s rovinou*** ρ***, obsahuje-li rovina*** ρ ***alespoň jednu přímku*** p'***, která je s přímkou*** p ***rovnoběžná.***

Je-li přímka rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

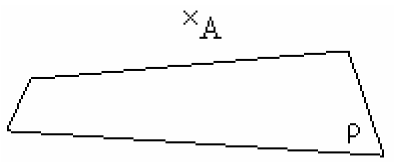
Rovnoběžnost dvou rovin:

Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin:



$p, r \subset \rho; p', r' \subset \sigma$

Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou.



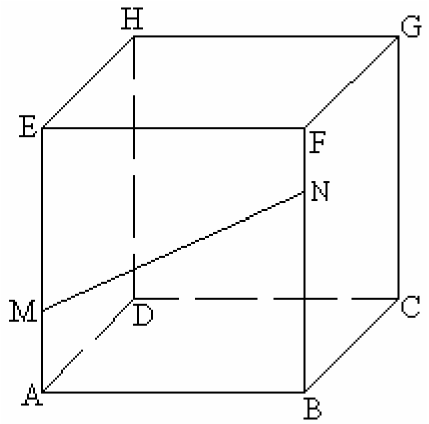
Daným bodem lze k dané rovině vést jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

ŘEZY

Řez je průnik tělesa a roviny.

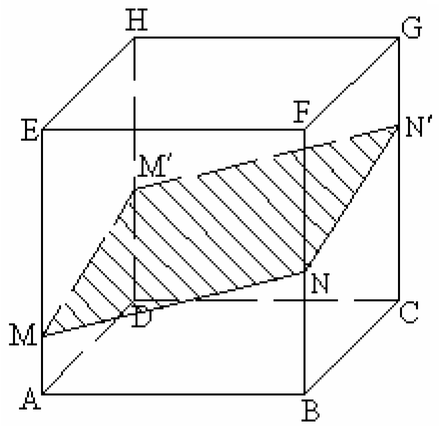
Řez je rovinný útvar, jehož hranice tvoří průsečnice roviny řezu a stěn tělesa.

Vlastnosti používané při konstrukci řezů:



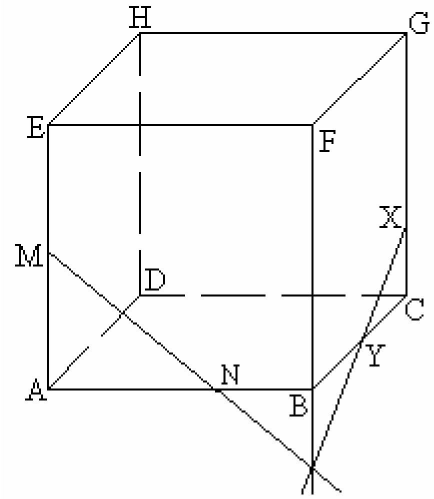
$M, N \subset ABE$

Leží-li dva různé body řezu v rovině stěny tělesa, leží v této stěně i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.



$ABE \| CDG; BCF \| ADE; MN \| M'N'; MM' \| NN'$

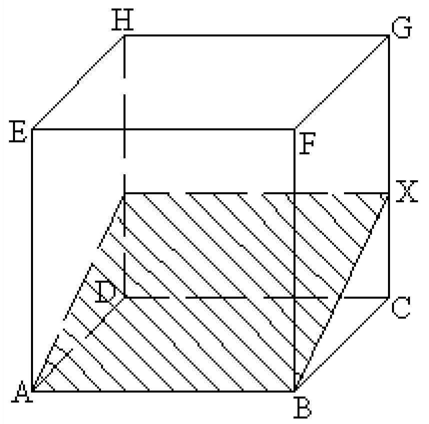
Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s těmito stěnami rovnoběžné.



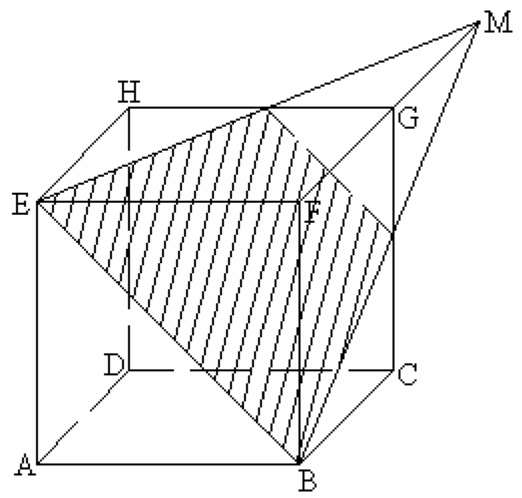
Průsečnice rovin dvou sousedních stěn s rovinou řezu a přímka v níž leží společná hrana dvou stěn se protínají v jediném bodě.

Př.:

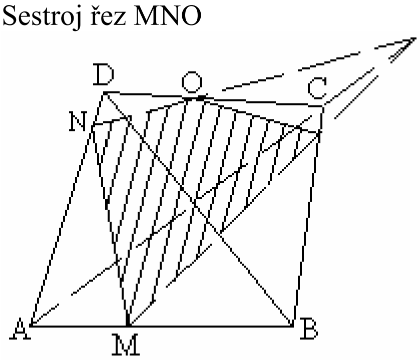
Sestroj řez ABX.



Sestroj řez BEM.



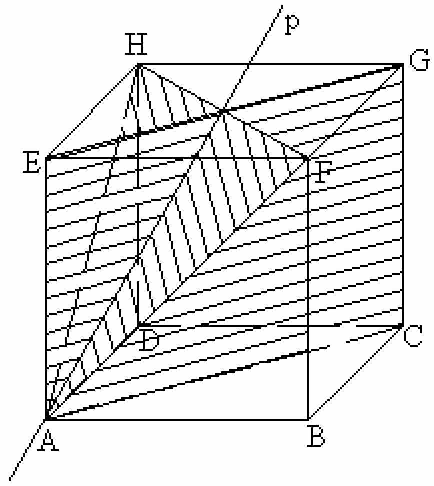
Sestroj řez MNO



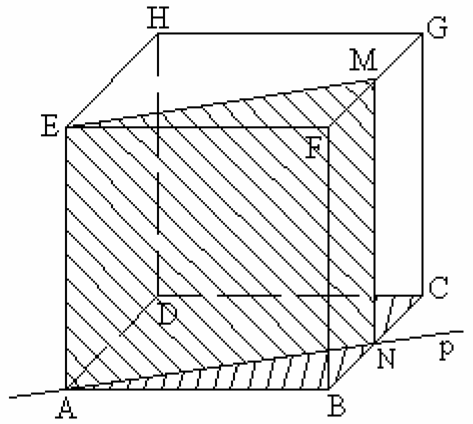
PRŮSEČNICE ROVIN

Př.:

Sestroj průsečnici p rovin AFH a ACE.



Sestroj průsečnici p rovin ABC a AMN.



METRICKÉ VZTAHY

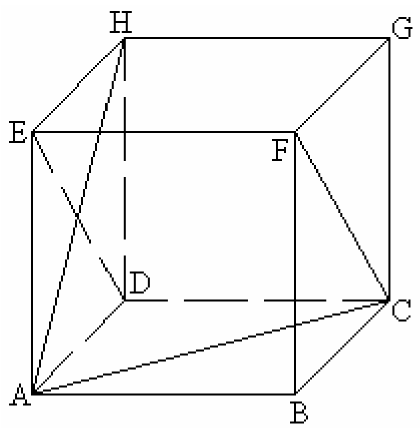
Odchylka dvou přímek:

Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých úhlů nebo pravých úhlů, které přímky svírají.

Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0°.

Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru, rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Př.:



a) odchylka AH a AE je 45°
b) odchylka AH a AC je 60°
c) odchylka AH a CF ($DE \| CF$) je 90°
d) odchylka CF a AC je 60

Kolmost přímek a rovin:

Dvě přímky jsou na sebe kolmé právě když je jejich odchylka 90°.

Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě když je přímka kolmá ke dvěma přímkám roviny.

Kritérium kolmosti přímky a roviny:

Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžným přímkám roviny, pak je kolmá k rovině.

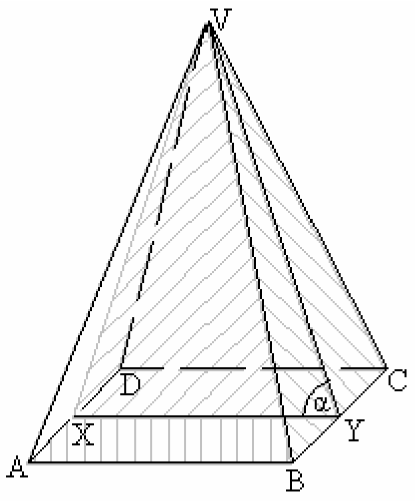
Kolmost dvou rovin:

Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Odchylka dvou rovin:

Odchylka dvou rovin je odchylka průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

Př.:



Urči odchylku rovin ABC a BCV ($|AB| = 5; |BC| = 5; |AV| = 7$).

X je polovina AD. Y je polovina BC. Vhodná kolmá rovina pro proložení je XYV. Průsečnice rovin ABC a XYV je XY a rovin BCV a XYV je YV.

$|XY| = |AB| = |BV| = 5$

Pomocí Pythagorovy věty se vypočítá délka YV:

$$|YV| = \sqrt{|BV|^2 - \left(\frac{|BC|}{2}\right)^2} = \sqrt{49 - 6{,}25} = 6{,}54$$

Pomocí kosinusovy věty se vypočítá velikost úhlu α:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{|XY|}{2}}{|YV|} = \frac{\frac{5}{2}}{6{,}54} = 0{,}3823$$

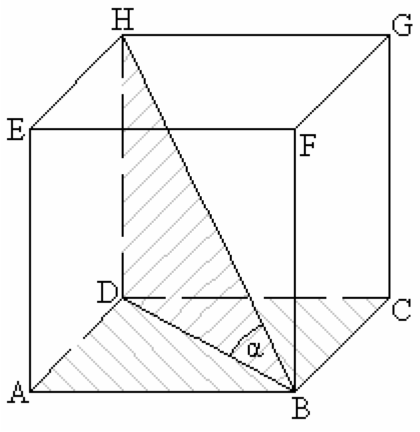
$\alpha = 67°31'13''$

(Výsledky byly zaokrouhleny. Přesný výsledek je $67°31'12{,}3''$.)

Odchylka přímky a roviny:

Odchylka přímky a roviny je nejmenší z odchylek přímky a libovolné přímky roviny.

Př.:



Urči odchylku přímky BH a roviny ABC ($|AB| = |BC| = |AE| = a$).

Vhodná kolmá rovina pro proložení je BDH. Průsečnice rovin ABC a BDH je přímka BD. Odchylka přímky BH a roviny ABC je rovna odchylce přímky BH a průsečnice BD.

Pomocí Pythagorovy věty se spočítá délka BD:

$$|BD| = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$|BD| = \sqrt{2a^2}$$

$$|BD| = a\sqrt{2}$$

Pomocí tangentovy věty se spočítá úhel α:

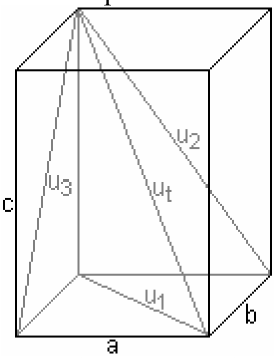
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{|BD|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 35°15'51{,}8''$$

20. Povrchy a objemy těles

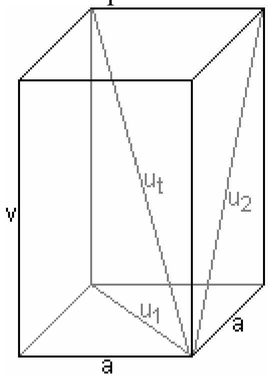
S .... povrch
V .... objem
S_p...... obsah podstavy
S_{pl} ..... obsah pláště
u .... úhlopříčka stěny tělesa
u_t ...... uhlopříčka tělesa
v .... výška tělesa
w .... výška stěny tělesa
h .... boční hrana
s .... strana (válce nebo kužele)

Kvádr – podstava obdélník



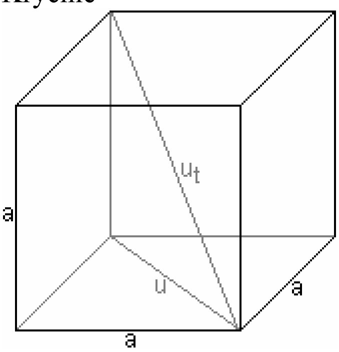
$$S = 2(ab + bc + ca) \qquad V = abc$$

Kvádr – podstava čtverec



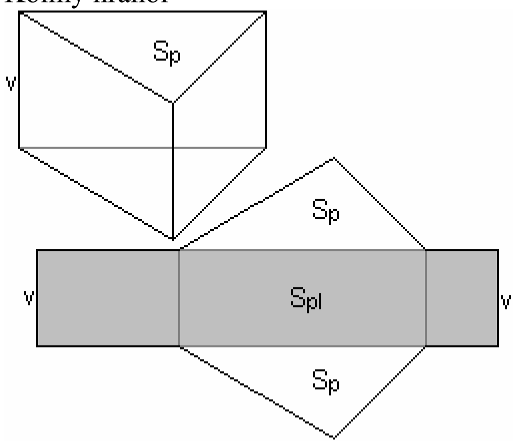
$$S = 2a(a + 2v) \qquad V = a^2 \cdot v$$

Krychle



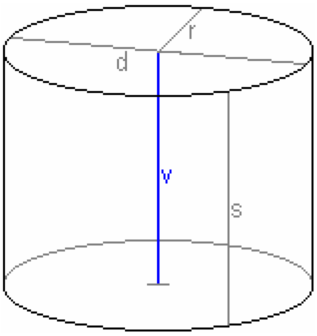
$$S = 6a^2 \qquad V = a^3$$

Kolmý hranol



$$S = 2S_p + S_{pl} \qquad V = S_p \cdot v$$

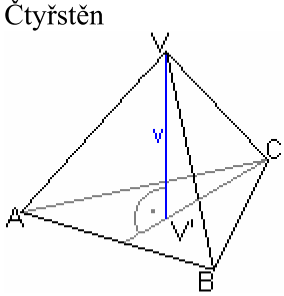
Rotační válec



$$S = 2 \cdot \pi r^2 \cdot (r + v) = \pi d\left(\frac{d}{2} + v\right)$$

$$V = \pi r^2 \cdot v = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v \qquad s = v$$

Čtyřstěn

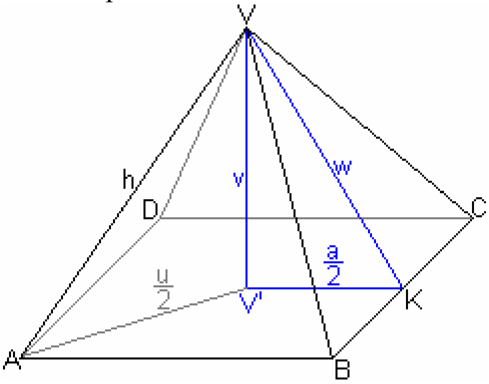


$$S_p \ldots \Delta ABC$$

$$S_{pl} \ldots \Delta ABV + \Delta BCV + \Delta CAV$$

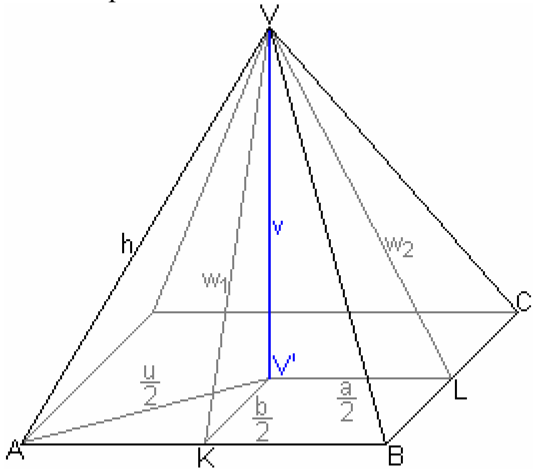
$$S = S_p + S_{pl} \qquad V = \frac{S_p \cdot v}{3}$$

Jehlan – podstava čtverec



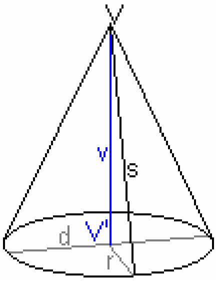
$$S = a^2 + 2aw \qquad V = \frac{a^2 \cdot v}{3}$$

Jehlan – podstava obdélník



$$S = ab + aw_1 + bw_2 \qquad V = \frac{abv}{3}$$

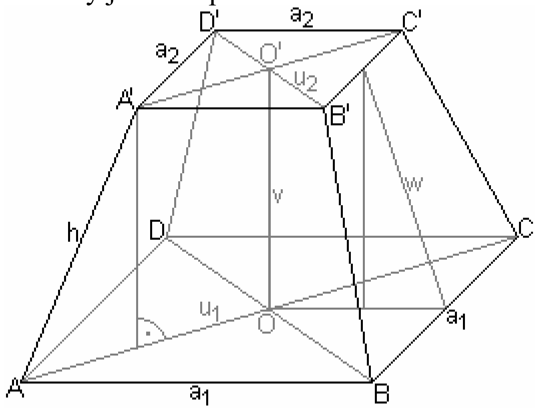
Rotační kužel



$$S = \pi r(r+s) = \frac{\pi d}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + s\right)$$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3} = \frac{\pi d^2 \cdot v}{12} \qquad s = \sqrt{r^2 + v^2}$$

Komolý jehlan – podstava čtverec



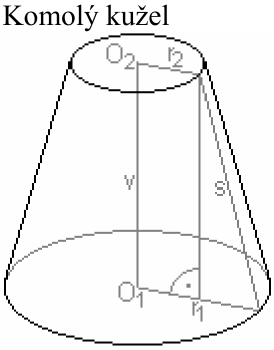
$$S = a_1^2 + a_2^2 + 2w(a_1 + a_2) \qquad V = \frac{v}{3}\left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right)$$

$$S_{p1} = a_1^2 \qquad S_{p2} = a_2^2 \qquad S_{pl} = 2w(a_1 + a_2)$$

Rotační komolý kužel, Komolý jehlan

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl} \qquad V = \frac{v}{3}\left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}} + S_{p2}\right)$$

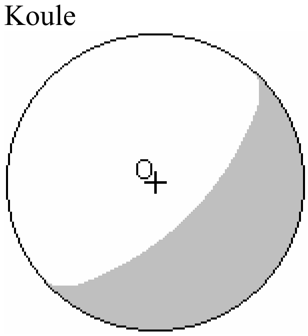
Komolý kužel



$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$$

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

Koule



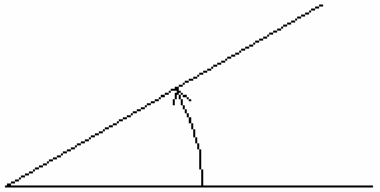
$$S = 4 \cdot \pi r^2 = \pi d^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$$

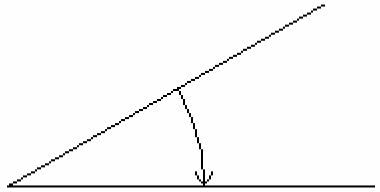
21. Goniometrické funkce

ORIENTOVANÝ ÚHEL

Kladný úhel – otáčí se proti směru hodinových ručiček.



Záporný úhel – otáčí se po směru hodinových ručiček.



Základní úhel (φ) je vždy kladný úhel nabývající hodnot $\langle 0°;360° \rangle$.

stupňová míra (°)............ $\omega = \varphi + k \cdot 360°; \varphi \in \langle 0°;360° \rangle, k \in Z$

oblouková míra (rad)...... $\omega = \varphi + k \cdot 2 \cdot \pi; \varphi \in \langle 0;2\pi \rangle, k \in Z$

Př.:

① $\varphi = 198°; k = 4; \omega = ?$

$\omega = \varphi + k \cdot 360°$

$\omega = 198° + 4 \cdot 360°$

$\omega = 1638°$

② $\omega = 3832°$

$k = \frac{3832°}{360°} = 10,644 \Rightarrow k = 10$

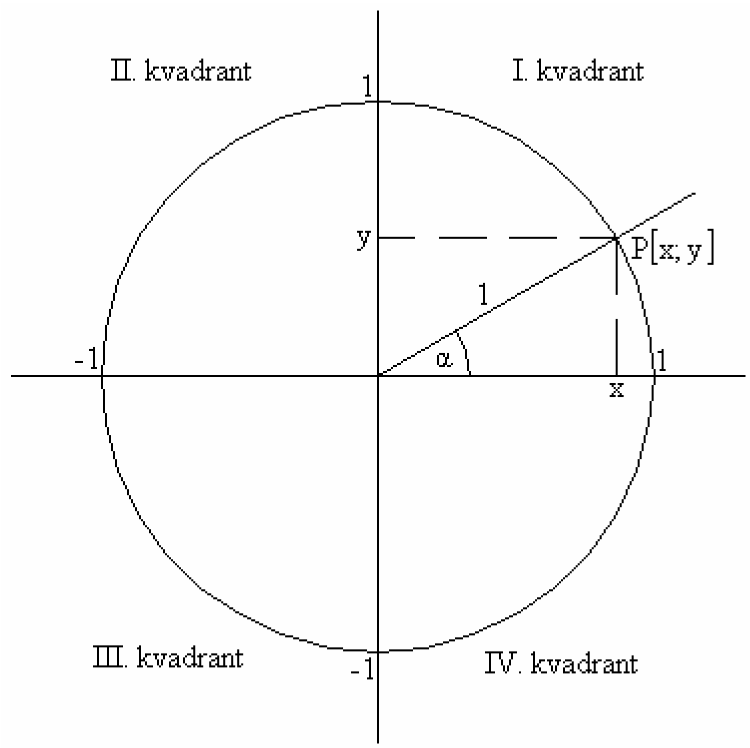
$\omega = \varphi + k \cdot 360°$

$3832° = \varphi + 10 \cdot 360°$

$3832° - 3600° = \varphi$

$232° = \varphi$

DEFINICE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ



$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Funkce sinus libovolného úhlu α ***je*** y ***souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu s jednotkovou kružnicí.***

Funkce kosinus libovolného úhlu α ***je*** x ***souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu s jednotkovou kružnicí.***

Funkce tangens libovolného úhlu α ***se nazývá funkce daná vztahem*** $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$**.**

Funkce kotangens libovolného úhlu α ***se nazývá funkce daná vztahem*** $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$**.**

	I	**II**	**III**	**IV**
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right);(0°;90°)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right);(90°;180°)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right);(180°;270°)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right);(270°;360°)$
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-

HODNOTY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ ZÁKLADNÍCH ÚHLŮ POMOCÍ ÚHLU OSTRÉHO

ostrý úhel .... $\alpha \in (0°;90°)$
základní úhel .... $\varphi \in (0°;360°)$

II. kvadrant $\alpha = 180° - \varphi$	*I. kvadrant* $\alpha = \varphi$
$\sin\varphi = \sin\alpha$ $\cos\varphi = -\cos\alpha$ $\mathrm{tg}\varphi = -\mathrm{tg}\alpha$ $\mathrm{cotg}\varphi = -\mathrm{cotg}\alpha$	$\sin\varphi = \sin\alpha$ $\cos\varphi = \cos\alpha$ $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\alpha$ $\mathrm{cotg}\varphi = \mathrm{cotg}\alpha$
III. kvadrant $\alpha = \varphi - 180°$	*IV. kvadrant* $\alpha = 360° - \varphi$
$\sin\varphi = -\sin\alpha$ $\cos\varphi = -\cos\alpha$ $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\alpha$ $\mathrm{cotg}\varphi = \mathrm{cotg}\alpha$	$\sin\varphi = -\sin\alpha$ $\cos\varphi = \cos\alpha$ $\mathrm{tg}\varphi = -\mathrm{tg}\alpha$ $\mathrm{cotg}\varphi = -\mathrm{cotg}\alpha$

	0°…0	**30°…π/6**	**45°…π/4**	**60°…π/3**	**90°…π/2**
sin φ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos φ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg φ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
cotg φ	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Př.:

① $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
II. kvadrant

② $\mathrm{tg}\frac{7}{6}\pi = \mathrm{tg}\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$
III. kvadrant

③ $\sin(-1935)° = \sin(-135)° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
I. kvadrant

④ $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
II. kvadrant

⑤ $\mathrm{tg}300° = -\mathrm{tg}45° = -\sqrt{3}$
IV. kvadrant

⑥ $\mathrm{cotg}135° = -\mathrm{cotg}45° = -1$
II. kvadrant

URČENÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ LIBOVOLNÉHO ORIENTOVANÉHO ÚHLU

libovolný orientovaný úhel .... ω
základní úhel............................. φ
ostrý úhel .... α

$$\sin\omega = \sin(k \cdot 360° + \varphi) \Rightarrow \sin\varphi$$
$$\cos\omega = \cos(k \cdot 360° + \varphi) \Rightarrow \cos\varphi$$
$$\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{tg}(k \cdot 360° + \varphi) \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi$$
$$\mathrm{cotg}\,\omega = \mathrm{cotg}(k \cdot 360° + \varphi) \Rightarrow \mathrm{cotg}\,\varphi$$

Př.:

① $\sin\frac{27}{4}\pi = \sin\left(3 \cdot 2\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \sin\frac{3}{4}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\mathrm{cotg}\frac{17}{2}\pi = \mathrm{cotg}\left(4 \cdot 2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \mathrm{cotg}\frac{1}{2}\pi = 0$

③ $\cos 1620° = \cos(4 \cdot 360° + 180°) = \cos 180° = 1$

④ $\sin(-1485°) = \sin(4 \cdot (-360°) - 45°) = \sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\mathrm{tg}\,870° = \mathrm{tg}(2 \cdot 360° + 150°) = \mathrm{tg}\,150° = -\mathrm{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑥ $\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

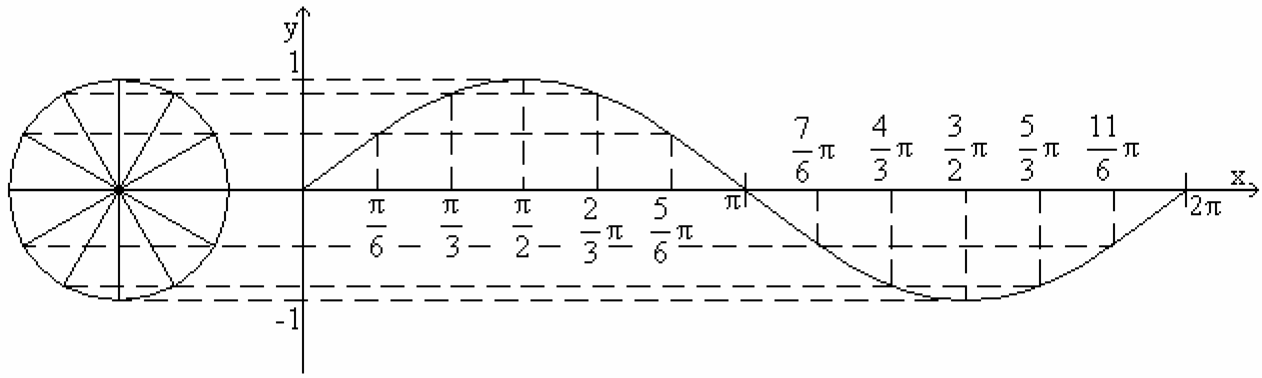
⑦ $\mathrm{cotg}(-1650°) = \mathrm{cotg}(4 \cdot (-360°) - 210°) = \mathrm{cotg}(-210°) = -\mathrm{cotg}\,30° = -\sqrt{3}$

⑧ $\sin 135° \cdot \cos 45° - \cos 225° \cdot \sin 315° - 3 =$
$= \sin 45° \cdot \cos 45° - (-\cos 45°)(-\sin 45°) - 3 =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3 = \frac{\sqrt{4}}{4} - \frac{\sqrt{4}}{4} - 3 = -3$

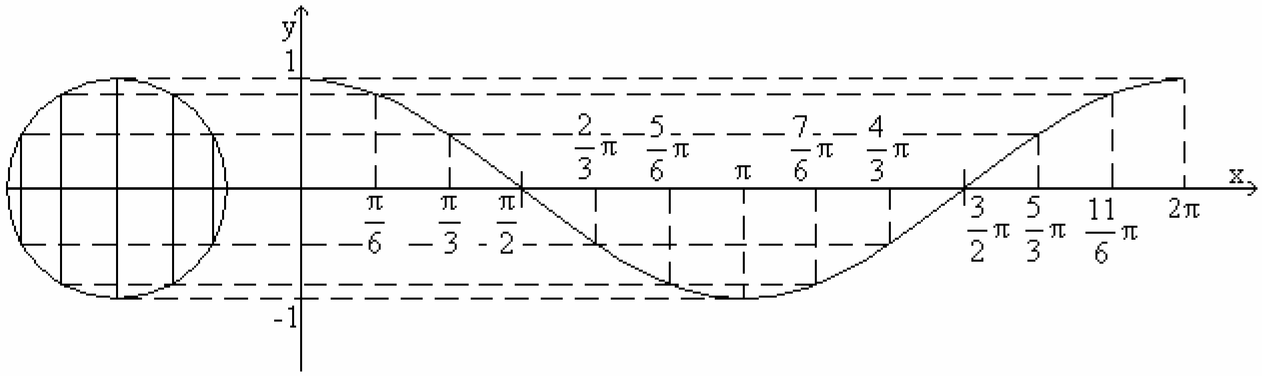
⑨ $\mathrm{cotg}\frac{47}{3}\pi = \mathrm{cotg}\left(7 \cdot 2\pi + \frac{5}{3}\pi\right) = \mathrm{cotg}\frac{5}{3}\pi = -\mathrm{cotg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

GRAFY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

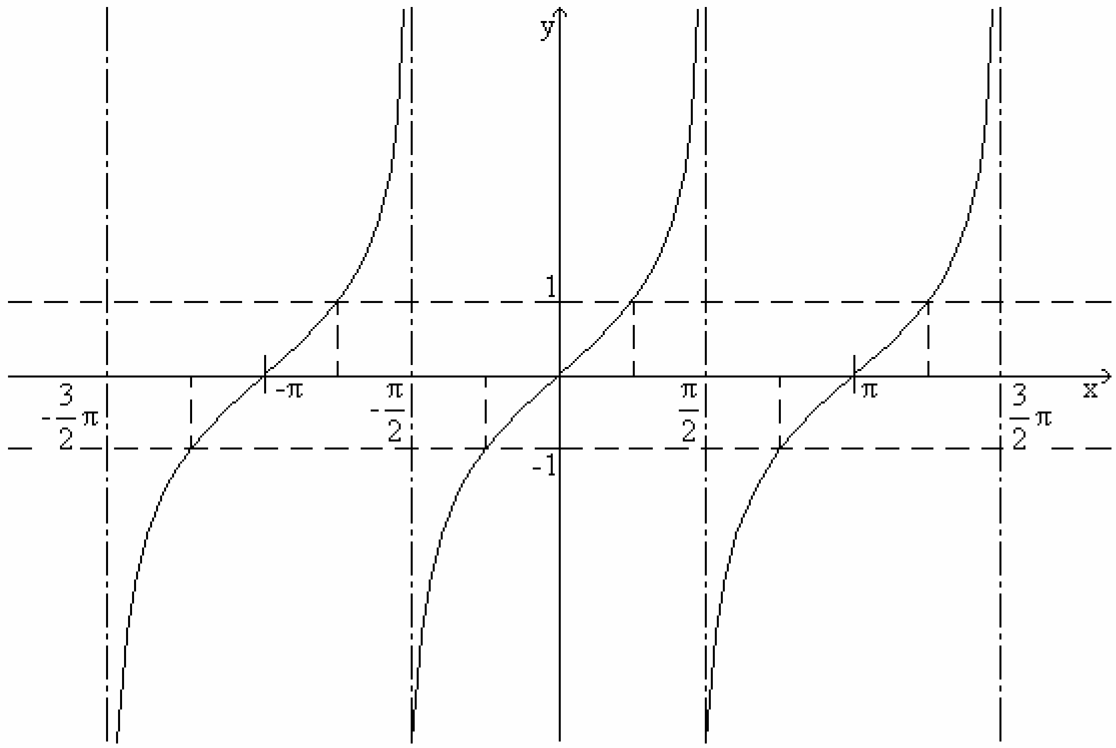
funkce sinx



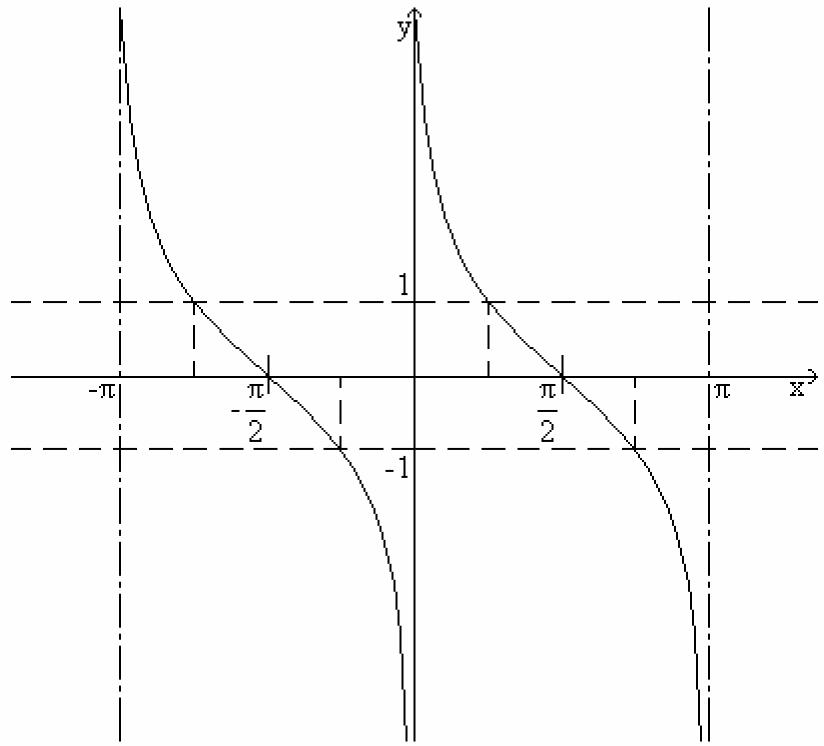
funkce cosx



funkce tgx



funkce cotgx



VLASTNOSTI GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

	y = sin*x*	**y = cos*x***	**y = tg*x***	**y = cotg*x***
D(f)	R		R-{π/2+kπ}	R-{kπ}
H(f)	<-1;1>		R	
sudost, lichost	lichá	sudá	lichá	
periodičnost	T = 2π … periodická		T = π … periodická	
omezenost	omezená		neomezená	
rostoucí	rostoucí … k∈Z <-π/2+k2π; 3π/2+k2π>	rostoucí … k∈Z <π+k2π; 2π+k2π>	rostoucí	klesající
klesající	klesající … k∈Z <π/2+k2π; 3π/2+k2π>	klesající … k∈Z <0+k2π; π+k2π>		
max. v bodě	y = 1 x = π/2+k2π	y = 1 x = 0+k2π	neexistuje	
min. v bodě	y = -1 x = -π/2+k2π	y = -1 x = π+k2π		
nulové body	y = 0 x = 0+kπ	y = 0 x = π/2+kπ	x = kπ	x = π/2+kπ

Definiční obor D(f) – množina všech x, pro které má daná funkce smysl.
Obor hodnot H(f) – množina všech y, pro které má daná funkce smysl.
Sudá funkce – graf funkce je souměrný podle osy y.

$$f(x) = f(-x); x \in D(f)$$

Lichá funkce – graf funkce je souměrný podle počátku.

$$f(x) = -f(-x); x \in D(f)$$

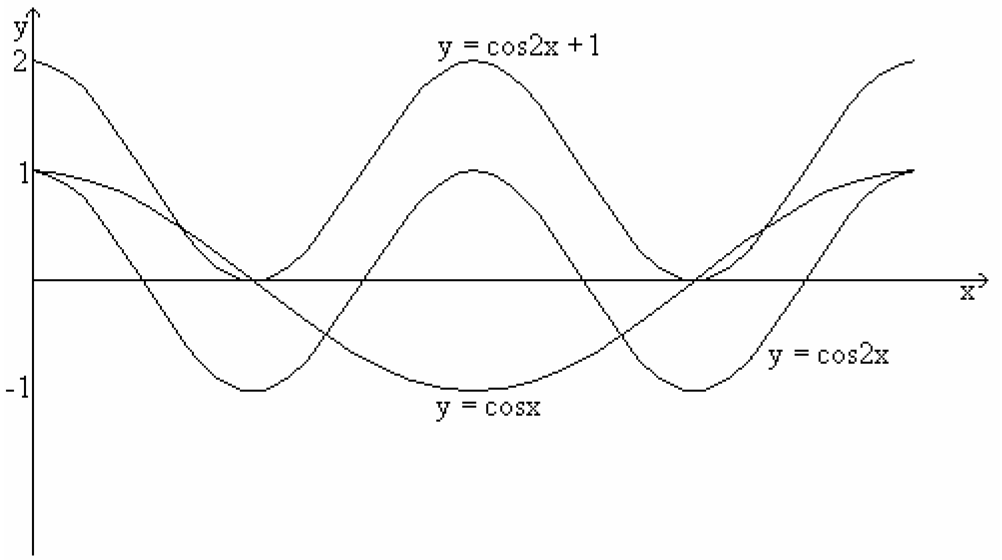
HARMONICKÁ FUNKCE

$$y = \pm a \cdot \sin\left(\pm bx \pm c\right) \pm d$$

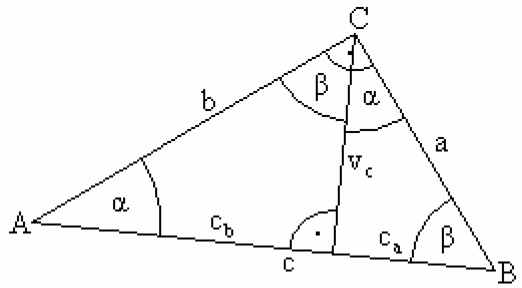
$\pm$................. zrcadlí graf kolem osy x
a .... ovlivňuje amplitudu
$\pm$................. zrcadlí graf kolem osy y
b .... ovlivňuje periodu
$\pm bx \pm c$ .... posun grafu po ose x (posun se zjistí porovnáním závorky s 0)
$\pm$d............... posun grafu po ose y

Př.:

$y = \cos 2x + 1$



22. Řešení pravoúhlého trojúhelníku



a, b........odvěsny
c............přepona
c_a, c_b......úseky přepony

Při řešení pravoúhlého trojúhelníku se využívá Pythagorova věta, Eukleidovy věty, goniometrická jednička a goniometrické funkce ostrého úhlu (viz téma 17, 21 a 23).

Pythagorova věta .... $c^2 = a^2 + b^2$
Eukleidova věta o výšce.......... $v_c^2 = c_a \cdot c_b$
Eukleidova věta o odvěsně ..... $a^2 = c \cdot c_a$; $b^2 = c \cdot c_b$
Goniometrická jednička......... $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
Goniometrické funkce ostrého úhlu vyplývající z pravoúhlého trojúhelníka:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c};\ \mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a};\ \mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b}$$

Obecné vztahy pro úhlu v pravoúhlém trojúhelníku:

$\gamma = 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Př.:

① Jaké jsou délky zbývajících stran a velikosti zbývajících vnitřních úhlů v pravoúhlém trojúhelníku, je-li dáno: $c = 12\text{cm}; \alpha = 72°50'$

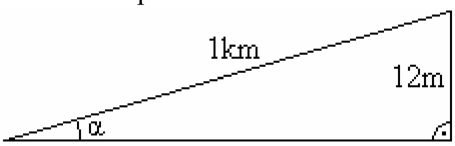
$$\gamma = 90°$$

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha = 90° - 72°50' = 17°10'$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \sin 72°50' = 11{,}47\text{cm}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{12^2 - 11{,}47^2} = \sqrt{144 - 131{,}56} = \sqrt{12{,}44} = 3{,}53\text{cm}$$

② Silnice stoupá rovnoměrně o 12 m na 1 km. Jaký je úhel jejího stoupání?



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{12\text{m}}{1000\text{m}} = 0{,}012 \Rightarrow \alpha = 0°41'15''$$

---

23. Úpravy výrazů s goniometrickou funkcí užitím vzorců

Goniometrická jednička......... $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Základní vzorce:

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\mathrm{cotg}x}$$

$$\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\mathrm{cotg}x}$$

Součtové vzorce:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin y \cdot \sin x$$

Vzorce pro dvojnásobný a poloviční úhel:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

Př.:

① Jakou hodnotu mají ostatní goniometrické funkce, je-li dáno: $\cos x = \frac{4}{5}; x \in \left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$

$$x \in \left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right) \Rightarrow 4.\,\text{kvadrant}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \left(-\frac{3}{\cancel{5}}\right)\cdot\frac{\cancel{5}}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x} = -\frac{4}{3}$$

② Zjednodušit výraz: $\frac{\mathrm{tg}z}{1+\mathrm{tg}^2 z}$

$$\frac{\mathrm{tg}z}{1+\mathrm{tg}^2 z} = \frac{\frac{\sin z}{\cos z}}{1+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}} = \frac{\frac{\sin z}{\cos z}}{\frac{\cos^2 z}{\cos^2 z}+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}} = \frac{\sin z}{\cos z}\cdot\frac{\cos^2 z}{\cos^2 z+\sin^2 z} = \frac{\sin z\cdot\cos z}{\cos^2 z+\left(1-\cos^2 z\right)} =$$

$$= \frac{\sin z\cdot\cos z}{\cos^2 z + 1 - \cos^2 z} = \frac{\sin z\cdot\cos z}{1} = \sin z\cdot\cos z$$

③ Důkaz: $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y; x \in R$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = (\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x)\cdot(\sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos x) =$$

$$= \sin^2 x\cdot\cos^2 y - \sin x\cdot\sin y\cdot\cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y\cdot\cos x\cdot\cos y - \sin^2 y\cdot\cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x\cdot\cos^2 y - \sin^2 y\cdot\cos^2 x = \sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 y\right) - \sin^2 y\cdot\left(1-\sin^2 x\right) =$$

$$= \sin^2 x - \sin^2 x\cdot\sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x\cdot\sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y$$

④ Zjednodušit výraz: $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2\sin x\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x = \sqrt{2}\cdot\sin x$$

⑤ $\sin 195° = \sin(150° + 45°) = \sin(30° + 45°) = \sin 30°\cdot\cos 45° + \sin 45°\cdot(-\cos 30°) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

⑥ Důkaz: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;\ x \in R$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) =$$
$$= 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^3 x =$$
$$= 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

⑦ Důkaz: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;\ x \in R$

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x =$$
$$= \cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = \cos^3 x - \cos x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) - 2\cos x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) =$$
$$= \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

⑧
$$\sin 75° + \sin 15° = 2\sin \frac{75° + 15°}{2} \cdot \cos \frac{75° - 15°}{2} = 2\sin \frac{90°}{2} \cdot \cos \frac{60°}{2} = 2\sin 45° \cdot \cos 30° =$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

24. Goniometrické rovnice

1. typ - v goniometrické rovnici se vyskytuje jediná goniometrická funkce.

2. typ - v goniometrické rovnici se vyskytuje více goniometrických funkcí téhož argumentu.

3. typ - v goniometrické rovnici se vyskytuje více goniometrických funkcí různých argumentů nebo jedna goniometrická funkce s různými argumenty.

Goniometrické rovnice 1. typu:

Př.:

①

$$\frac{\sin x + 2}{\sin x} = 5$$

podmínky:

$\sin x \neq 0 + k \cdot 180°$

$\sin x \neq k \cdot 180°$

$$\sin x + 2 = 5\sin x$$
$$2 = 5\sin x - \sin x$$
$$2 = 4\sin x$$
$$\frac{2}{4} = \sin x$$
$$\frac{1}{2} = \sin x$$

$$x = 30° + k \cdot 360°$$
$$x = 150° + k \cdot 360°$$

②

$$2\cos(3v + 33°) = -\sqrt{2}$$
$$\cos\underbrace{(3v + 33°)}_{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x = 45°$$

funkce kosinus je záporná ve II. a III. kvadrantu

$$x_1 = 135° + k \cdot 360°$$
$$x_2 = 225° + k \cdot 360°$$

$x_1 = 135° + k \cdot 360°$

$3v_1 + 33° = 135° + k \cdot 360°$

$3v_1 = 102° + k \cdot 360° \quad |:3$

$v_1 = 34° + k \cdot 120°$

$x_2 = 225° + k \cdot 360°$

$3v_2 + 33° = 225° + k \cdot 360°$

$3v_2 = 192° + k \cdot 360° \quad |:3$

$v_2 = 64° + k \cdot 120°$

③ $4\cos^2 t + 4\cos t - 3 = 0$

$$\cos t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4\cdot(-3)}}{2\cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} =$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-4-8}{8} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2} \\ \frac{-4+8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$\cos t_1 = -\frac{3}{2}$	$\cos t_2 = \frac{1}{2}$
nemá smysl	$t_2 = 60° + k\cdot 360°$
	$t_2 = 300° + k\cdot 360°$

Goniometrické rovnice 2. typu:

Př.:

① $6\cos^2 t + \sin t - 5 = 0$

$6(1 - \sin^2 t) + \sin t - 5 = 0$

$6 - 6\sin^2 t + \sin t - 5 = 0$

$-6\sin^2 t + \sin t + 1 = 0$

$$\sin t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-6)\cdot 1}}{2\cdot(-6)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-12} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-12} =$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{-12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1-5}{-12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1+5}{-12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$\sin t_1 = \frac{1}{2}$	$\sin t_2 = -\frac{1}{3}$
$t_1 = 30° + k\cdot 360°$	$t_2 = 19°28'$
$t_1 = 150° + k\cdot 360°$	$t_2 = 199°28' + k\cdot 360°$
	$t_2 = 340°32' + k\cdot 360°$

② $3\sin x - 2\cos x = 0$

$3\sin x = 2\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{3}$

$\mathrm{tg}\, x = \frac{2}{3}$

podmínky:
$\cos x \neq 0$
$x \neq 90° + k\cdot 180°$

$x = 33°41' + k\cdot 180°$

③ $4\sin^2 t = -\sqrt{3}\cdot \mathrm{tg}t$

$$4\sin^2 t = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$4\sin^2 t\cdot\cos t = -\sqrt{3}\cdot\sin t$$

$$4\sin^2 t\cdot\cos t + \sqrt{3}\cdot\sin t = 0$$

$$\sin t\cdot\left(4\sin t\cdot\cos t + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin t\cdot\left(2\cdot 2\sin t\cdot\cos t + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin t\cdot\left(2\sin 2t + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin t_1 = 0$$

$$t_1 = 0° + k\cdot 360°$$

$$t_1 = k\cdot 360°$$

$$2\sin 2t_2 + \sqrt{3} = 0$$

$$2\sin 2t_2 = -\sqrt{3}$$

$$\sin 2t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2t_2 = 240° + k\cdot 360°$$

$$\underline{2t_2 = 300° + k\cdot 360°}$$

$$t_2 = 120° + k\cdot 180°$$

$$t_2 = 150° + k\cdot 180°$$

Goniometrické rovnice 2. typu - speciální případ:

Př.:

$$8\sin x + 6\cos x = 9$$

1) rovnice se převede na poloviční úhel

$$8\sin x + 6\cos x = 9$$

$$8\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right) + 6\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 9\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$16\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + 6\cos^2\frac{x}{2} - 6\sin^2\frac{x}{2} = 9\sin^2\frac{x}{2} + 9\cos^2\frac{x}{2}$$

$$16\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + 6\cos^2\frac{x}{2} - 6\sin^2\frac{x}{2} - 9\sin^2\frac{x}{2} - 9\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$16\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 3\cos^2\frac{x}{2} - 15\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

2) rovnice se převede na funkci tangens

$$16\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 3\cos^2\frac{x}{2} - 15\sin^2\frac{x}{2} = 0 \quad \Big|: \cos^2\frac{x}{2}$$

$$\frac{16\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{3\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{15\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{16\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 3 - \frac{15\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$16\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3 - 15\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = 0$$

$$-15\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 16\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3 = 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$15\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 16\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$\mathrm{tg}\frac{x_{1,2}}{2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{16\pm\sqrt{256-180}}{30} = \frac{16\pm\sqrt{76}}{30} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{16+\sqrt{76}}{30} \\ \frac{16-\sqrt{76}}{30} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{tg}\frac{x_1}{2} = \frac{16+\sqrt{76}}{30} \qquad\qquad \mathrm{tg}\frac{x_2}{2} = \frac{16-\sqrt{76}}{30}$$

$$\frac{x_1}{2} = 39°29' + k\cdot 180° \quad \Big|\cdot 2 \qquad\qquad \frac{x_2}{2} = 13°38' + k\cdot 180° \quad \Big|\cdot 2$$

$$x_1 = 78°58' + k\cdot 360° \qquad\qquad x_2 = 27°16' + k\cdot 360°$$

Goniometrické rovnice 3. typu:

Př.:

① $\sin 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x$

$\sin 2x - \cos 3x \cdot \sin 2x = 0$

$\sin 2x \cdot (1 - \cos 3x) = 0$

$\sin 2x_1 = 0$

$2x_1 = 0° + k \cdot 180°$

$x_1 = 0° + k \cdot 90°$

$x_1 = k \cdot 90°$

$1 - \cos 3x_2 = 0$

$1 = \cos 3x_2$

$3x_2 = 0° + k \cdot 360°$

$x_2 = 0° + k \cdot 120°$

$x_2 = k \cdot 120°$

② $\sin(t + 15°) + \sin(t + 75°) = \sqrt{3}$

$$2\sin\frac{t + 15° + t + 75°}{2} \cdot \cos\frac{t + 15° - t - 75°}{2} = \sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{2t + 90°}{2} \cdot \cos\frac{-60°}{2} = \sqrt{3}$$

$$2\sin(t + 45°) \cdot \cos(-30°) = \sqrt{3}$$

$$\sin(t + 45°) \cdot \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(t + 45°) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

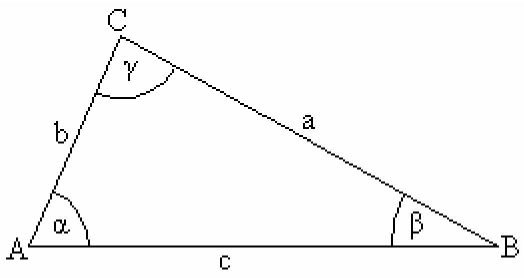
$$\sin(t + 45°) = 1$$

$$(t + 45°) = 90° + k \cdot 360°$$

$$t = 45° + k \cdot 360°$$

25. Řešení obecného trojúhelníku

SINOVA VĚTA



Nechť ABC ***je trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti*** α, β, γ ***a strany délky*** a, b, c***, pak platí:***

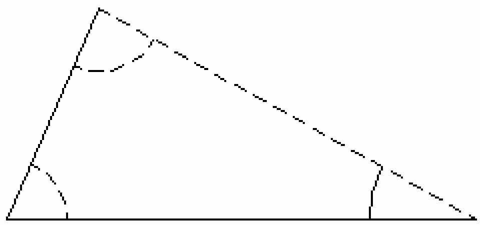
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\lambda}$$

Poměr délky strany a hodnoty sinu protilehlého úhlu je v trojúhelníku konstantní.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma};\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

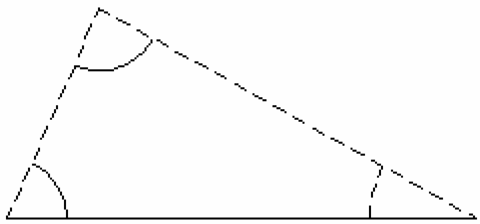
$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

Užití sinovy věty:



ssu

2 strany
1 úhel



uus

1 strany
2 úhly

Př.:

① $b=8\text{cm};\alpha=45°;\gamma=30°$

$$\alpha+\beta+\gamma=180°\Rightarrow\beta=180°-(\alpha+\beta)=180°-(45°+30°)=180°-75°=105°$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=8\cdot\frac{\sin45°}{\sin105°}=5{,}86\text{cm}$$

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\Rightarrow c=b\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=8\cdot\frac{\sin30°}{\sin105°}=4{,}14\text{cm}$$

② $a = 38; b = 48; \alpha = 37°$

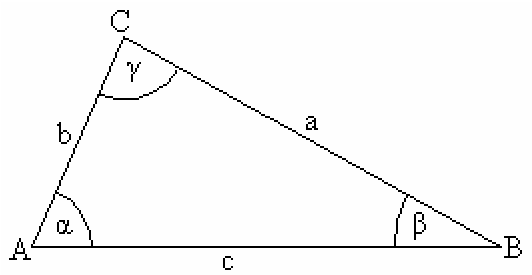
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{48}{38}\cdot\sin 37° = 0{,}76 \Rightarrow \beta = 49°27'51''$$

funkce sinus je sudá v I. a II. kvadrantu

$$\beta_1 = 49°27'51''$$
$$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1) = 180° - 87°27'51'' = 92°32'09''$$
$$\frac{a}{c_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} \Rightarrow c_1 = a\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = 38\cdot\frac{\sin 92°32'09''}{\sin 37°} = 63{,}1$$

$$\beta_2 = 130°32'09''$$
$$\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2) = 180° - 168°32'09'' = 11°27'51''$$
$$\frac{a}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2} \Rightarrow c_1 = a\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha} = 38\cdot\frac{\sin 11°27'51''}{\sin 37°} = 12{,}55$$

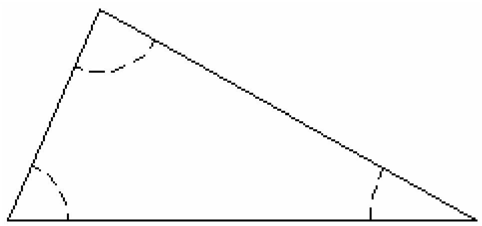
KOSINOVA VĚTA



Nechť ABC ***je trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti*** α, β, γ ***a strany délky*** a, b, c***, pak platí:***

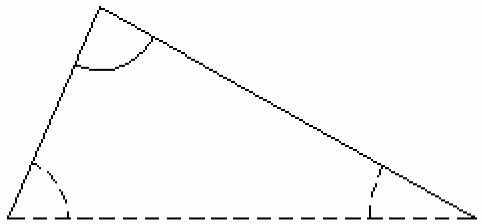
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

Užití kosinovy věty:



sss

3 strany



sus

2 strany a úhel jimi sevřený

Př.:

① $a = 5; b = 4; \gamma = 60°$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60°} =$$
$$= \sqrt{25 + 16 - 40 \cdot \cos 60°} = \sqrt{21} = 4{,}58$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 4{,}58^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 4{,}58} = \frac{16 + 20{,}9764 - 25}{36{,}64} =$$
$$= 0{,}3269 \Rightarrow \alpha = 70°55'09''$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (70°55'09'' + 60°) = 180° - 130°55'09'' = 49°04'51''$$

② $a = 26; b = 16{,}9; c = 27{,}3$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\lambda \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{26^2 + 16{,}9^2 - 27{,}3^2}{2 \cdot 26 \cdot 16{,}9} = \frac{676 + 285{,}61 - 745{,}29}{878{,}8} =$$
$$= 0{,}2462 \Rightarrow \gamma = 75°44'50''$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16{,}9^2 + 27{,}3^2 - 26^2}{2 \cdot 16{,}9 \cdot 27{,}3} = \frac{285{,}61 + 745{,}29 - 676}{922{,}74} =$$
$$= 0{,}3846 \Rightarrow \alpha = 67°22'52''$$
$$\alpha + \beta + \lambda = 180° \Rightarrow \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (67°22'52'' + 75°44'50'') = 180° - 143°07'42'' =$$
$$= 36°52'18''$$

26. Komplexní číslo – pojem, algebraický tvar, operace

Komplexním číslem** c **nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel** a, b**, kde** a **je reálná část a** b **je imaginární část komplexního čísla.

ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

$c = a + bi$

a .... reální část komplexního čísla

b .... imaginární část komplexního čísla

i .... imaginární jednotka $\left(i^2 = -1\right)$

Reálné číslo je komplexní číslo, které má imaginární část rovnu nule.
Ryze imaginární číslo je komplexní číslo, které má reálnou část rovnu nule.

Mocniny imaginární jednotky:

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

Př.:

$i^{83} = i^{4\cdot 20+3} = -i$

$i^{10} = i^{4\cdot 2+2} = -1$

$i^{121} = i^{4\cdot 30+1} = i$

Operace s komplexními čísly:

rovnost $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

součet $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

rozdíl $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

součin $(a + bi)\cdot(c + di) = a\cdot c + a\cdot di + bi\cdot c + \underbrace{bi\cdot di}_{b\cdot d\cdot i^2 = (-1)\cdot b\cdot d}$

podíl $z = a + bi$ .... komplexní číslo

$-z = -a - bi$ ..... opačné číslo k číslu z

$\bar{z} = a - bi$ .... komplexně sdružené číslo k číslu z

Komplexní čísla se dělí rozšířením zlomku komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli.

Př.:

① $a = 2 + 3i;\ b = 2 + 3i$

$a = b$

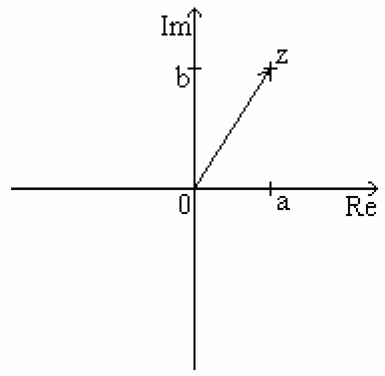
② $(2 + 3i) + (1 - i) = 2 + 3i + 1 - i = 3 + 2i$

③ $(5 + 4i) - (9 - 4i) = 5 + 4i - 9 + 4i = -4 + 8i$

④ $(1 + 2i)\cdot(3 - i) = 1\cdot 3 - 1i + 2i\cdot 3 - 2i\cdot i = 3 - i + 6i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = 3 + 5i + 2 = 5 + 5i$

⑤ $$\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\cdot\frac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{\underbrace{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}_{(A+B)(A-B)}}=\frac{2-\mathrm{i}-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}=\frac{2-3\mathrm{i}-1}{4+1}=\frac{1-3\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$$

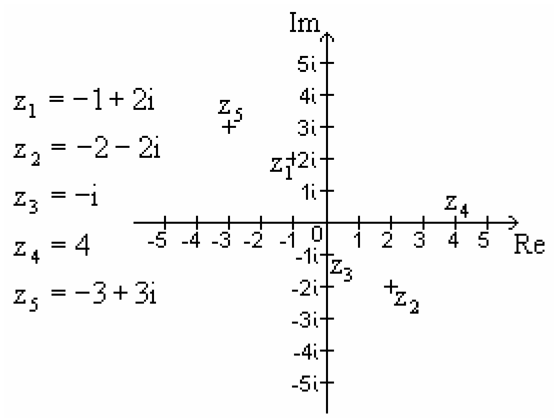
GEOMETRICKÝ MODEL KOMPLEXNÍCH ČÍSEL



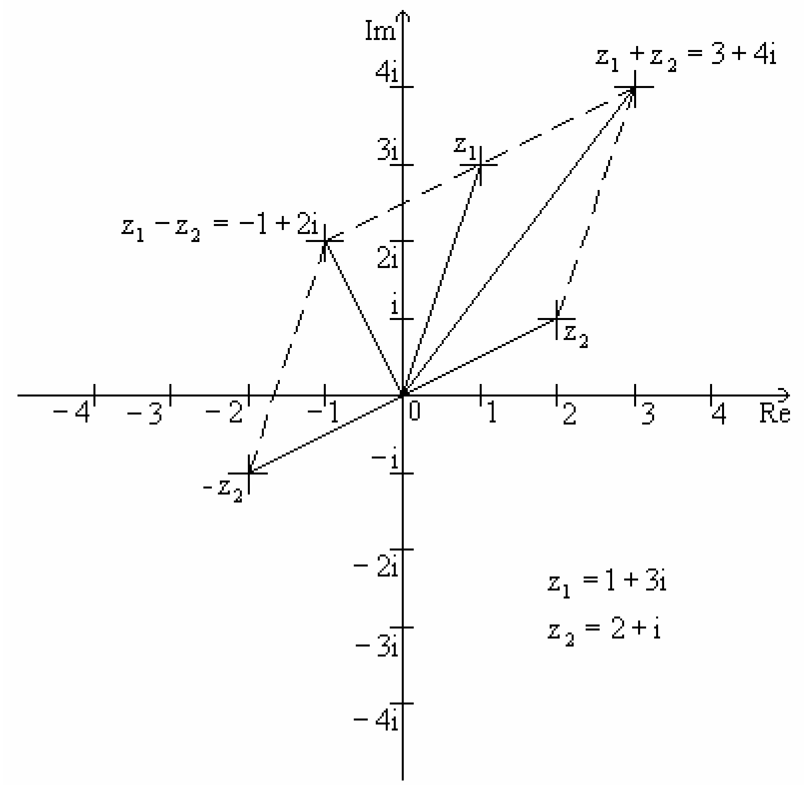
Každé komplexní číslo lze zobrazit jako vektor v Gaussově rovině. Sčítání komplexních čísel pak odpovídá sčítání vektorů, odčítání komplexních čísel odčítání vektorů.

Př.:

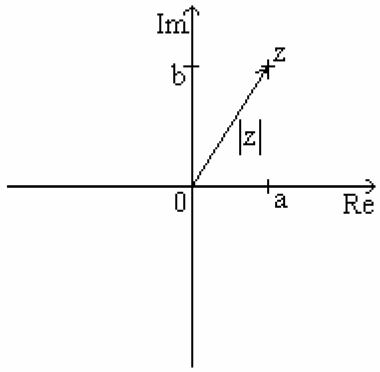
①



②



ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometrický výzman absolutní hodnoty komplexního čísla:
Vzdálenost obrazu komplexního čísla od počátku v Gaussově rovině.

Komplexní jednotka – komplexní číslo, jehož absolutní hodnota se rovná jedné.

Př.:

① $z = 1 - 2i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

② $z = (1+2i)^2 = 1^2 + 2\cdot 2i + 2^2 i^2 = 1 + 4i + 4\cdot(-1) = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

③ $z = \frac{3-2i}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4}i$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

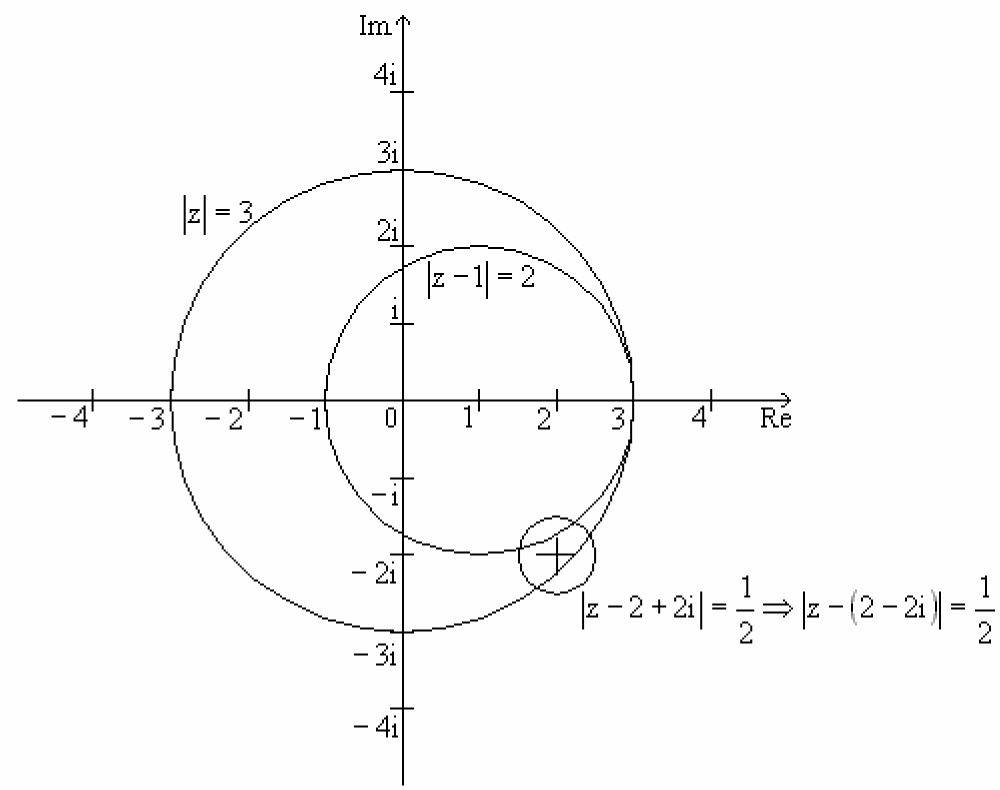
④ $z = \frac{7i}{2+i} = \frac{7i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{7i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{14i - 7i^2}{4 - i^2} = \frac{14i - 7(-1)}{4-(-1)} = \frac{14i+7}{4+1} = \frac{7+14i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{14}{5}i$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{25} + \frac{196}{25}} = \sqrt{\frac{245}{25}} = \frac{\sqrt{245}}{25}$$

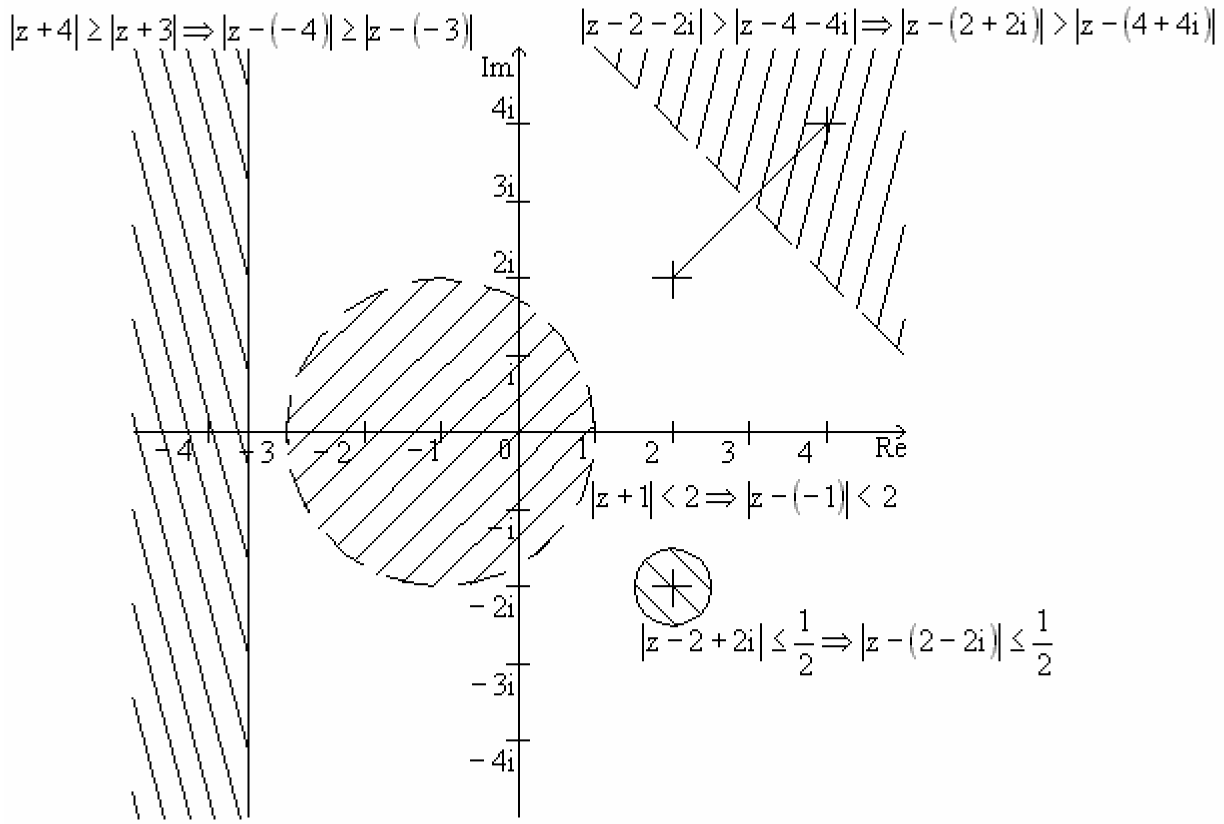
ZOBRAZOVÁNÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V GAUSSOVĚ ROVINĚ

Př.:

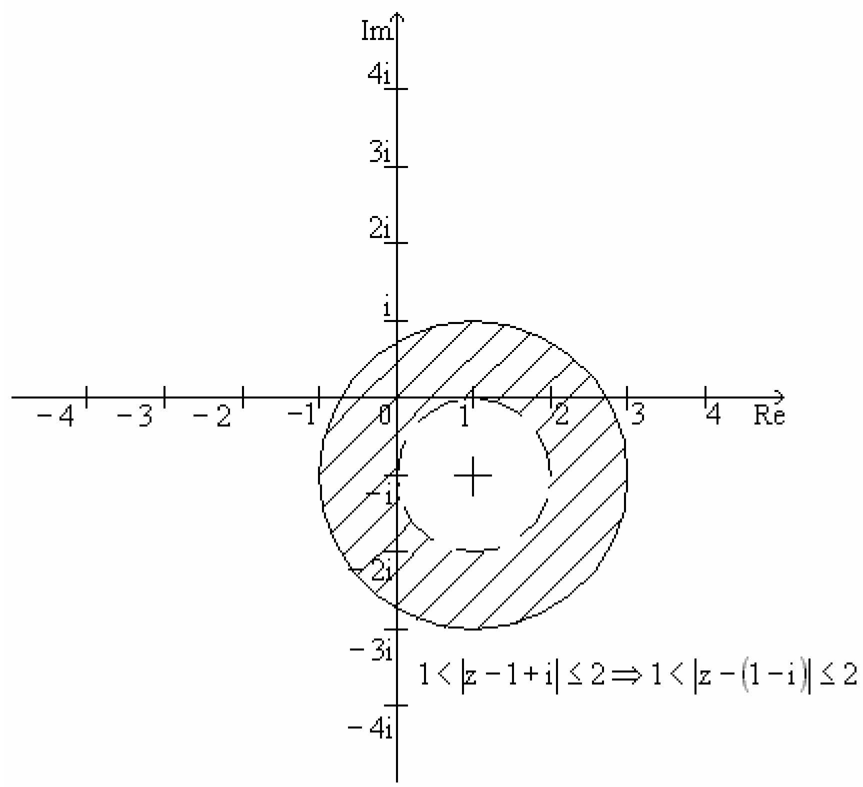
①



②

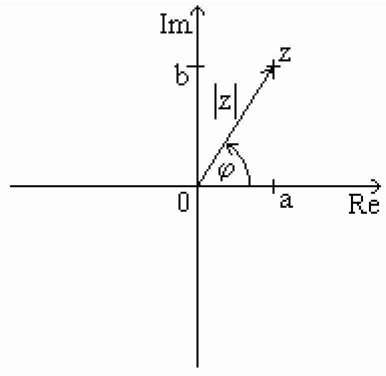


③


Im
4i
3i
2i
i
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
Re
−i
−2i
−3i
−4i
$1 < |z - 1 + i| \le 2 \Rightarrow 1 < |z - (1 - i)| \le 2$

27. Komplexní číslo – goniometrický a exponenciální tvar, operace

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA



$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$|z|$ ....absolutní hodnota komplexního čísla

φ......argument komplexního čísla $\langle 0°;360° \rangle$

$z = a + bi$

$\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos\varphi$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \sin\varphi$

Př.:

① $z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \varphi_0 = 45°$$

sinus i kosinus jsou kladné, což znamená, že se jedná o 1. kvadrant $\Rightarrow \varphi = 45°$

$z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \cdot \sin 45°)$

② $z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1-1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \varphi_0 = 45°$$

jedná se o 4. kvadrant, neboť je sinus záporný a kosinus kladný $\Rightarrow \varphi = 315°$

$z = \sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \cdot \sin 315°)$

Operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru:

$z_1 = a \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$

$z_2 = b \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$

součin $z_1 \cdot z_2 = a \cdot b \cdot (\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta))$

podíl $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a}{b} \cdot (\cos(\alpha-\beta) + i \cdot \sin(\alpha-\beta))$

Př.:

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

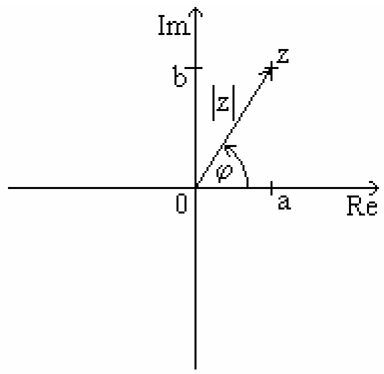
$$z_1\cdot z_2 = 6\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 18\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi}{6}\right) = 18\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{6}\right) =$$

$$= 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi-2\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi-2\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA



$$z = |z|\cdot e^{i\varphi}$$

$|z|$ ....absolutní hodnota komplexního čísla

e.......Eulerovo číslo $(e \cong 2{,}72)$

φ......argument komplexního čísla (vždy v radiánech $\langle 0;2\pi\rangle$)

Př.:

$$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z = 2e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

$$\frac{3\pi}{4} = 135°$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 135° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cdot\cos\varphi = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\cdot\sin\varphi = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$z = a + bi = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru:

$$z_1 = a\cdot e^{i\alpha}$$

$$z_2 = b\cdot e^{i\beta}$$

součin $z_1\cdot z_2 = a\cdot b\cdot e^{i\cdot(\alpha+\beta)}$

podíl $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b}\cdot e^{i\cdot(\alpha-\beta)}$

Př.:

$$z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1\cdot z_2 = 6\cdot 3\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 18e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{6}\right)} = 18e^{i\frac{3\pi}{6}} = 18e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi-2\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

28. Moivreova věta, binomické rovnice

MOIVREOVA VĚTA

Pro všechna přirozená čísla n ***a pro libovolné reálné číslo*** φ ***platí:***
$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)$.

Pro všechna přirozená čísla n ***a pro všechna komplexní čísla ve tvaru***
$|z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ ***platí:*** $[|z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))$.

Př.:

① $$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^{50} = \cos\frac{50\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{50\pi}{4} = \cos\frac{2\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{4} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = 0 + i\cdot 1 = i$$

② $$\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{70} = \cos\frac{70\cdot 2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{70\cdot 2\pi}{3} = \cos\frac{140\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{140\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

úhel $\frac{2\pi}{3}$ se nachází ve 2. kvadrantu, což znamená, že v základním úhlu bude kosinus záporný a sinus kladný

$$\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}} + i\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

BINOMICKÉ ROVNICE

$\sqrt[n]{a}$ ***se nazývá komplexní číslo*** z***, pro které platí, že*** $z^n = a$***. Rovnice typu*** $z^n = a$ ***se nazývá binomická rovnice, kde*** z ***je každý kořen binomické rovnice.***

Postup řešení:

1) $\sqrt[n]{a} = z \to z^n = a$
2) komplexní čísla z a a se vyjádří v goniometrickém tvaru
$[|z|\cdot(\cos x + i\cdot\sin x)]^n = |a|\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$
3) umocnit podle Moivreovy věty
$|z|^n\cdot(\cos(nx) + i\cdot\sin(nx)) = |a|\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$
4) porovnat komplexní čísla na obou stranách
$|z|^n = |a| \quad\wedge\quad nx = \alpha + 2k\pi$
$|z| = \sqrt[n]{|a|} \quad\wedge\quad x = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$
5) zapsání všech n kořenů v goniometrickém tvaru
6) obrazy všech kořenů binomické rovnice leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt[n]{|a|}$ a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníku

Př.:

$$\sqrt[4]{-1+i}=z$$

1) $\sqrt[4]{-1+i}=z \rightarrow z^4=-1+i$

2) $|a|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a}{|a|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin\alpha&=\frac{b}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}2.\,\text{kvadrant}\Rightarrow \alpha=135°$$

$$\left[|z|\cdot(\cos x+i\cdot\sin x)\right]^4=\sqrt{2}\cdot(\cos 135°+i\cdot\sin 135°)$$

3) $|z|^4\cdot(\cos 4x+i\cdot\sin 4x)=\sqrt{2}\cdot(\cos 135°+i\cdot\sin 135°)$

4) $|z|^4=\sqrt{2} \quad \wedge \quad 4x=135°+k\cdot 360°$

$$|z|=\sqrt[4]{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad x=\frac{135°}{4}+k\cdot\frac{360°}{4}$$

$$|z|=\sqrt[8]{2} \quad \wedge \quad x=33°45'+k\cdot 90°$$

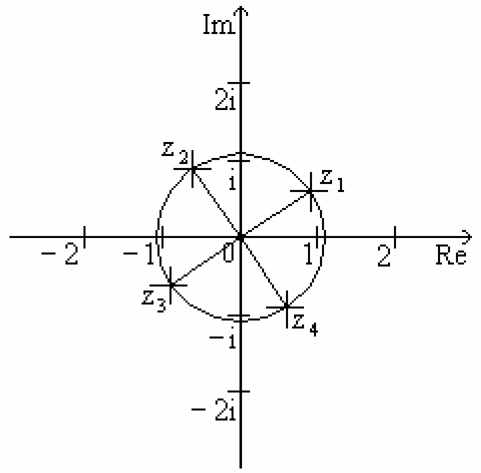
5) $k=0 \quad z_1=\sqrt[8]{2}(\cos 33°45'+i\cdot\sin 33°45')$

$k=1 \quad z_2=\sqrt[8]{2}(\cos 123°45'+i\cdot\sin 123°45')$

$k=2 \quad z_3=\sqrt[8]{2}(\cos 213°45'+i\cdot\sin 213°45')$

$k=3 \quad z_4=\sqrt[8]{2}(\cos 303°45'+i\cdot\sin 303°45')$

6)



29. Lineární lomená funkce

LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE

Lineární lomená funkce je každá funkce ve tvaru: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***, kde***

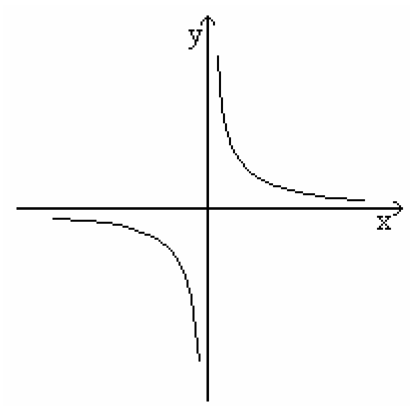
$a, b, c, d \in R; c \neq 0; ad \neq bc$.

Graf funkce ....rovnoosá hyperbola, jenž má střed v bodě $\left[-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right]$

Základní grafy:

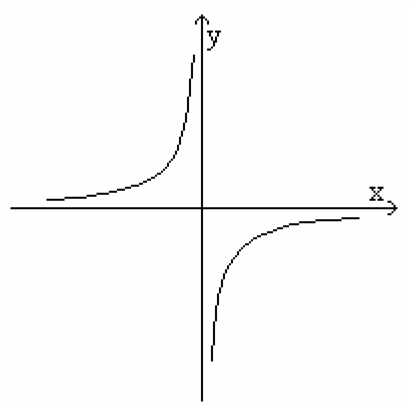
$$y = \frac{k}{x}$$

$k > 0$



$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = R - \{0\}$
lichá
klesající
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

$k < 0$



$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = R - \{0\}$
lichá
rostoucí
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

Postup řešení:

1) výraz $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, kterým je funkce určena se podělí (dělení mnohočlenu mnohočlenem, viz téma číslo 3)
2) vznikne výraz $y = \dfrac{k}{x+a} + b$, kde $y = \dfrac{k}{x}$ udává základní graf funkce, b je posun po ose y a z rovnice $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$ vyjde posun po ose x
3) graf funkce

Př.:

$$y_1=\frac{2x_1+3}{x_1-1}$$

$$y_2=\left|\frac{1}{2x_2-1}\right|$$

$$y_3=\frac{|x_3-2|}{2x_3-3}$$

1) $$(2x_1+3):(x_1-1)=2+\frac{5}{x_1-1}$$

$$\frac{1}{2x_2-1}$$

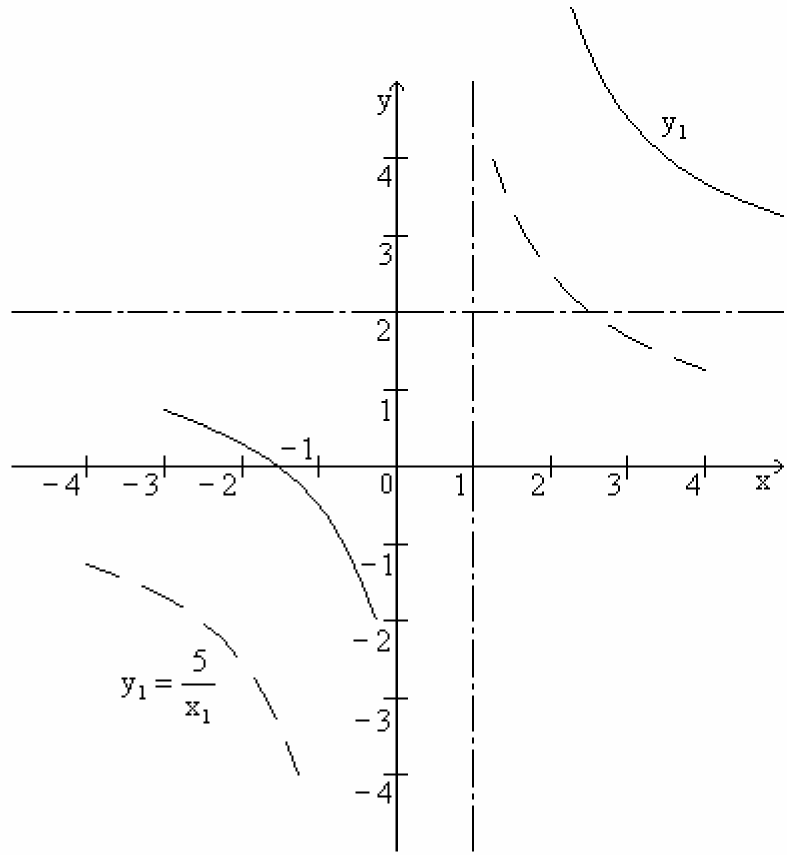
$$(x_{3a}-2):(2x_{3a}-3)=0{,}5-\frac{0{,}5}{2x_{3a}-3}$$

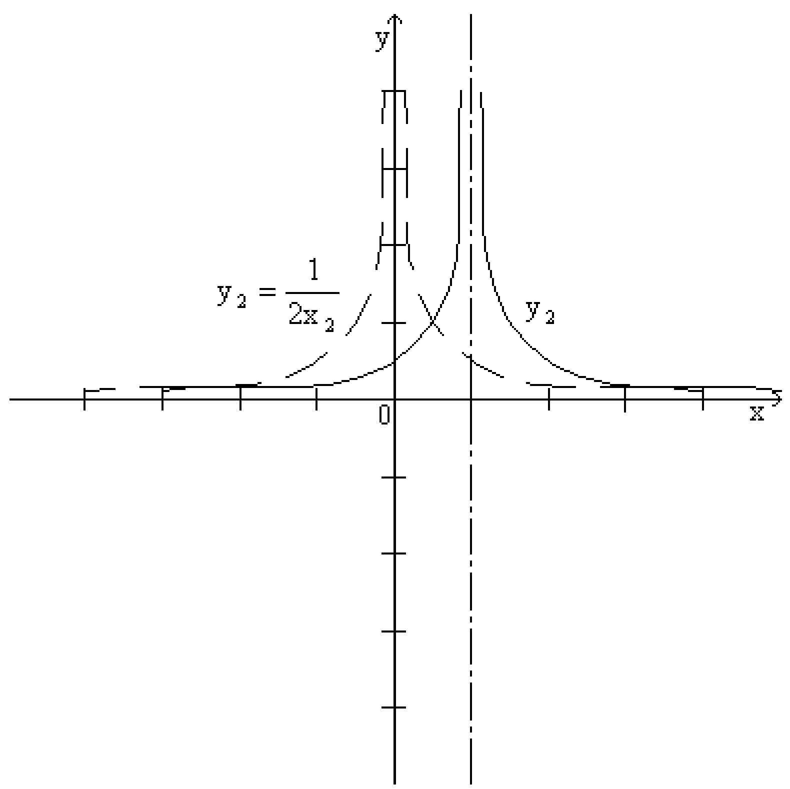
$$(-x_{3b}+2):(2x_{3b}-3)=-0{,}5+\frac{0{,}5}{2x_{3b}-3}$$

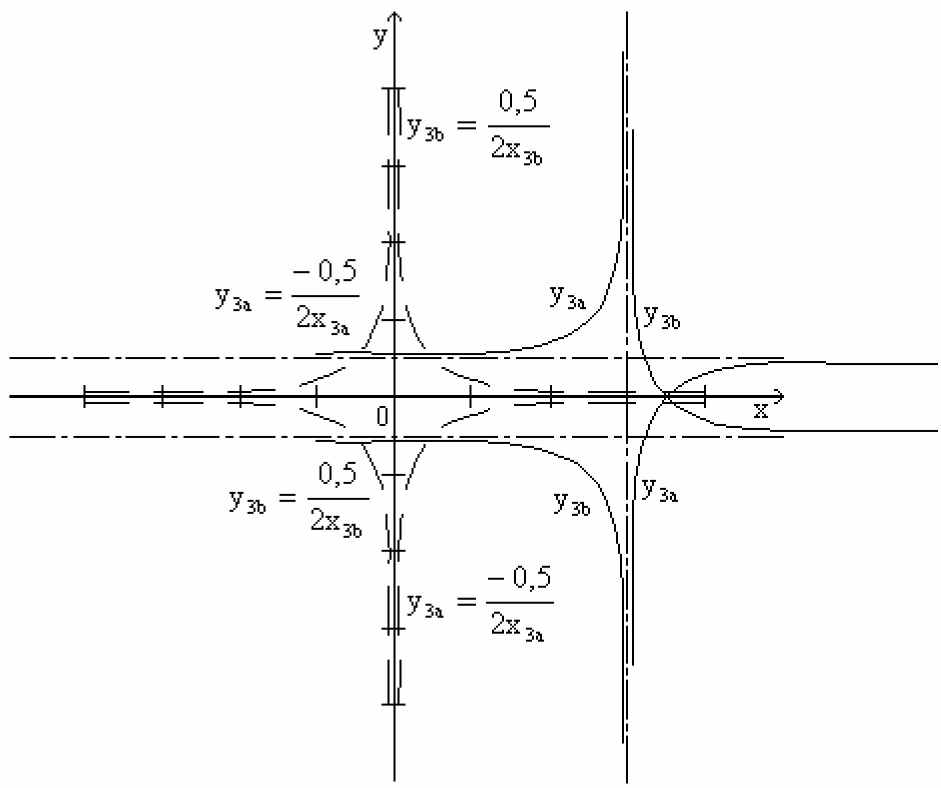
2)

$y_1=\frac{5}{x_1}$	$y_2=\frac{1}{2x_2}$	$y_{3a}=\frac{-0{,}5}{2x_{3a}}$	$y_{3b}=\frac{0{,}5}{2x_{3b}}$
$y_{01}=2$	$y_{02}=0$	$y_{03a}=0{,}5$	$y_{03b}=-0{,}5$
$x_{01}=1$	$x_{02}=1$	$x_{03a}=3$	$x_{03b}=3$

3)




y
$y_2 = \frac{1}{2x_2}$
y_2
0
x


y
$y_{3b} = \frac{0,5}{2x_{3b}}$
$y_{3a} = \frac{-0,5}{2x_{3a}}$
y_{3a}
y_{3b}
0
x
$y_{3b} = \frac{0,5}{2x_{3b}}$
y_{3b}
y_{3a}
$y_{3a} = \frac{-0,5}{2x_{3a}}$

NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

Nepřímá úměrnost je každá funkce definovaná na množině $R-\{0\}$***, která je dána vztahem*** $y=\frac{k}{x}$***, kdy*** $k\in R, k\neq 0$**.**

Je to tedy taková lineární lomená funkce $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a=0$ a $d=0$.

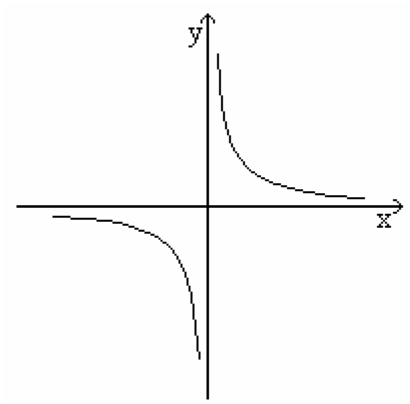
$\Rightarrow y=\frac{0x+b}{cx+0}=\frac{b}{cx}=\frac{k}{x}$

Graf funkce ....rovnoosá hyperbola, jenž má střed v bodě $\left[-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right]$

Základní grafy:

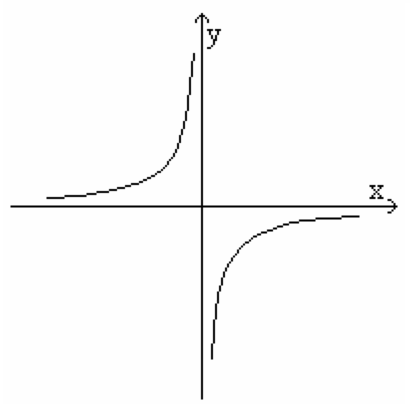
$y=\frac{k}{x}$

$k>0$



$D(f)=R-\{0\}$
$H(f)=R-\{0\}$
lichá
klesající
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

$k<0$



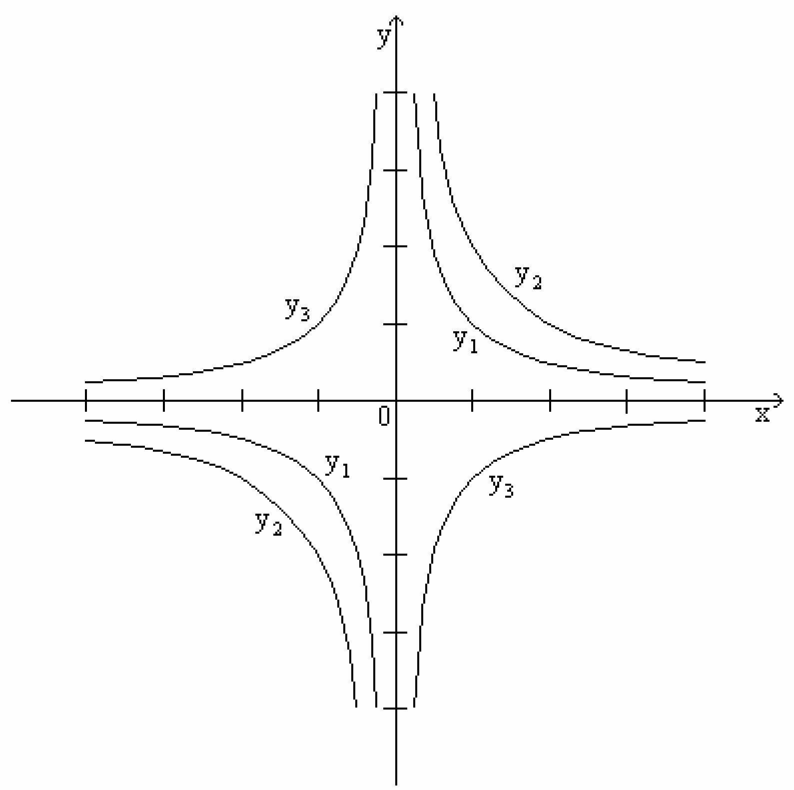
$D(f)=R-\{0\}$
$H(f)=R-\{0\}$
lichá
rostoucí
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

Př.:

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

$$y_2 = \frac{2}{x}$$

$$y_3 = -\frac{1}{x}$$

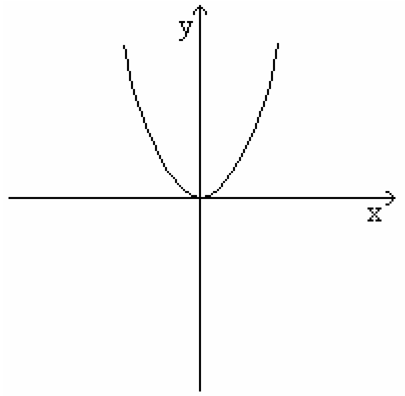


30. Mocninné funkce

Mocninná funkce je funkce dána vztahem $y = x^n$***, kde*** $n \in N$.

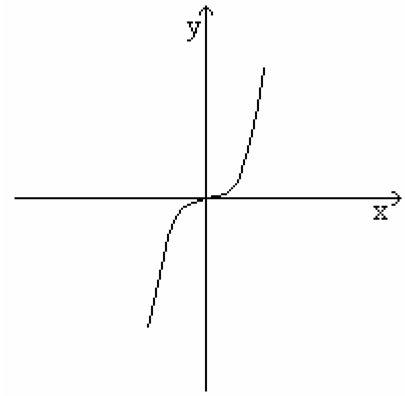
Základní grafy:

$n > 0$
sudé



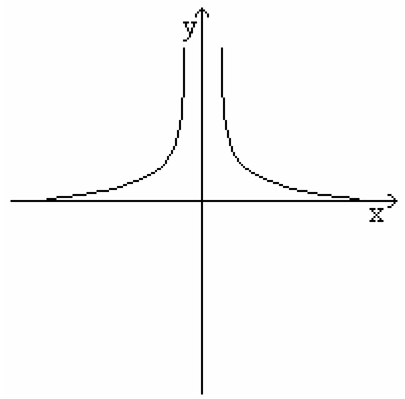
$D(f) = R$
$H(f) = \langle 0; \infty)$
sudá
pro $(-\infty; 0\rangle$ klesající
pro $\langle 0; \infty)$ rostoucí
není prostá
omezená zdola
minimum v bodě $[0;0]$
nemá maximum

$n > 0$
liché



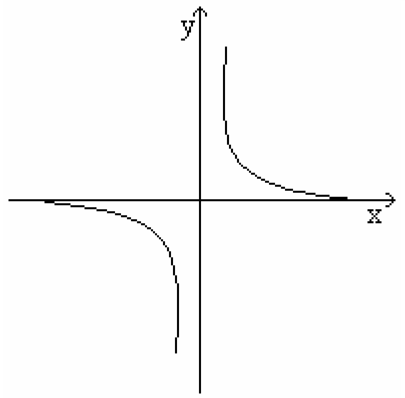
$D(f) = R$
$H(f) = R$
lichá
rostoucí
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

$n < 0$
sudé



$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = (0; \infty)$
sudá
pro $(-\infty; 0)$ rostoucí
pro $(0; \infty)$ klesající
není prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

$n < 0$
liché

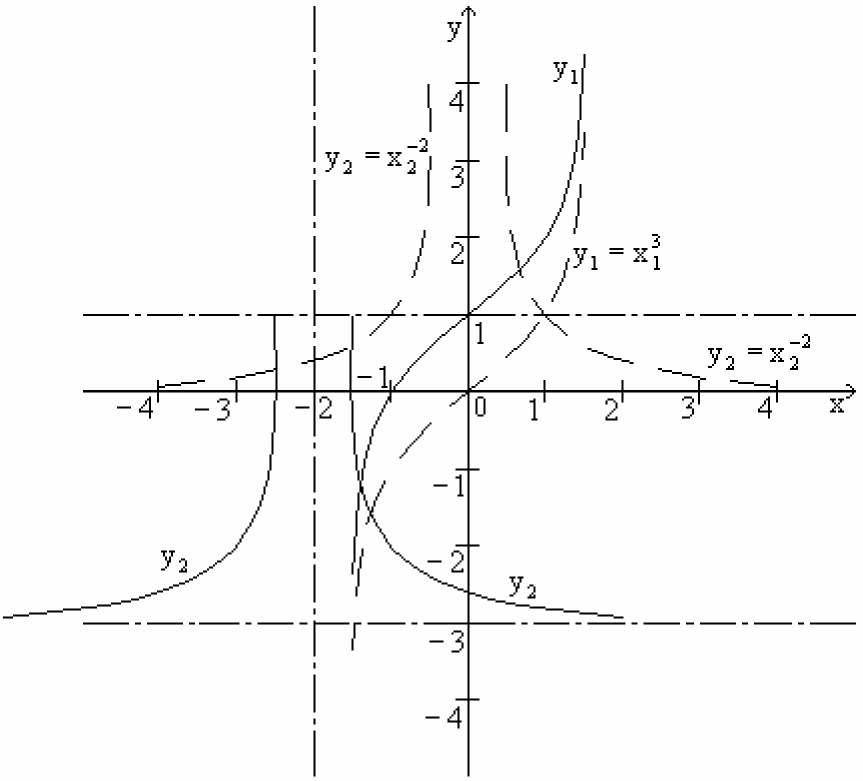


$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = R - \{0\}$
lichá
klesající
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

Př.:

$$y_1 = x_1^3 + 1 \Rightarrow y_1 = x_1^3; y_{01} = 1$$

$$y_2 = (x_2 + 2)^{-2} - 3 \Rightarrow y_2 = x_2^{-2}; \begin{matrix} x_{02} + 2 = 0 \\ x_{02} = -2 \end{matrix}; y_{02} = -3$$



31. Exponenciální funkce, exponenciální rovnice

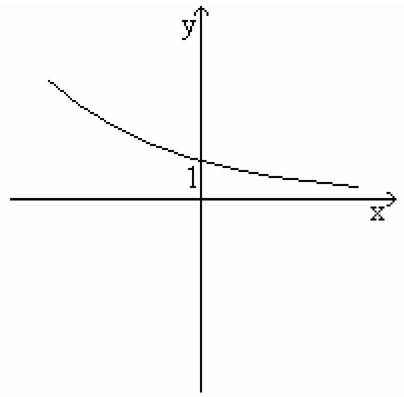
EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Každá funkce na množině R ***daná výrazem*** $y = a^x$***, kde*** a ***je základ mocniny*** $a > 0, a \neq 1$.

Graf funkce ....exponenciála

Základní grafy:

$0 < a < 1$



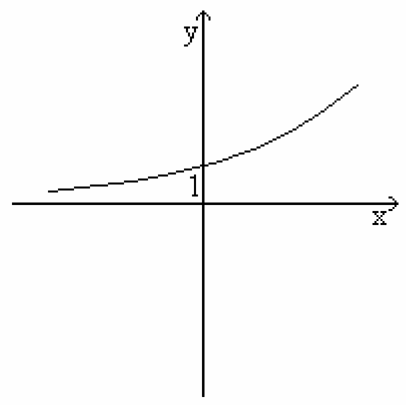
$D(f) = R$

$H(f) = (0;\infty)$

ani sudá, ani lichá
klesající
prostá
omezená zdola
ani maximum, ani minimum

inverzní k funkci logaritmické

$a > 1$



$D(f) = R$

$H(f) = (0;\infty)$

ani sudá, ani lichá
rostoucí
prostá
omezená zdola
ani maximum, ani minimum

inverzní k funkci logaritmické

Přirozená exponenciální funkce:

$y = e^x$

e .... Eulerovo číslo $(e \cong 2{,}72)$

Inverzní funkce ....funkce, jejíž graf je ke grafu dané funkce souměrný podle osy 1. a 3. kvadrantu

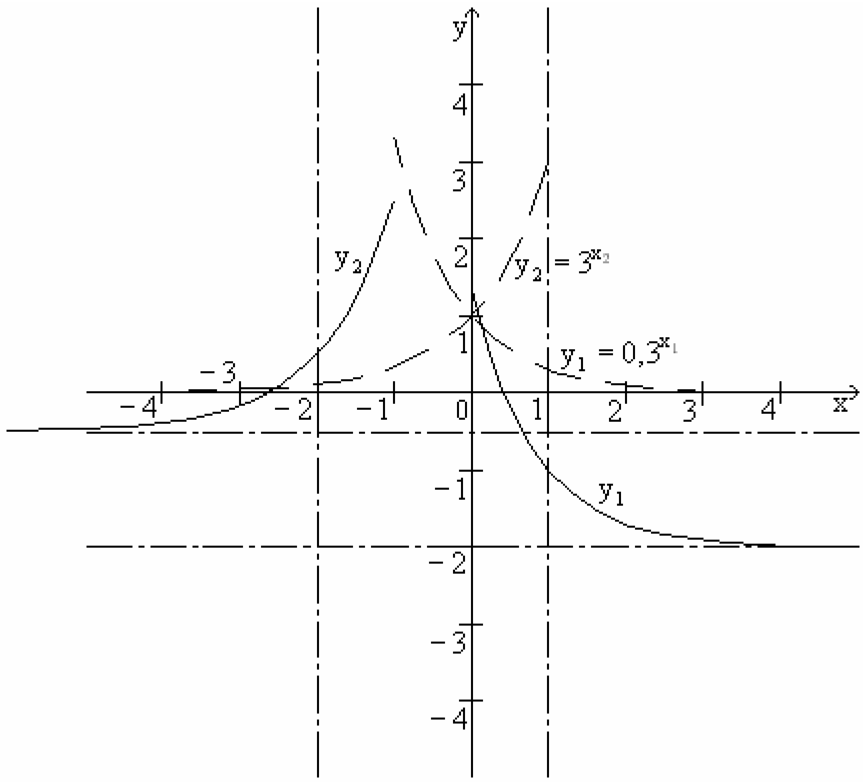
$f : y = ax + b$

$f^{-1} : x = ay + b \Rightarrow y = \dfrac{x - b}{a}$ (funkce inverzní)

Př.:

$$y_1 = 0{,}3^{x_1 - 1} - 2 \Rightarrow y_1 = 0{,}3^{x_1};\ \begin{array}{l} x_{01} - 1 = 0 \\ x_{01} = 1 \end{array};\ y_{01} = -2$$

$$y_2 = 3^{x_2 + 2} - 0{,}5 \Rightarrow y_2 = 3^{x_2};\ \begin{array}{l} x_{02} + 2 = 0 \\ x_{02} = -2 \end{array};\ y_{02} = -0{,}5$$



EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Exponenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá vyskytuje v exponentu.

Základní rovnice $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, kde levá i pravá strana mají stejný základ mocniny $a > 0, a \neq 1$ se řeší porovnáním exponentů.

Rovnice typu $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde levá a pravá strana nemají stejný základ mocniny $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ se řeší pomocí logaritmů $f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$.

Složitější exponenciální rovnice se převádějí na jeden z výše uvedených tvarů.

Př.:

①

$$5^x = 625$$
$$5^x = 5^4$$
$$x = 4$$

②

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$
$$2x - 5 = -3$$
$$2x = -3 + 5$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

③

$$25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$$
$$5^{2x} = 5^{-x^2}$$
$$2x = -x^2$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \Big| \quad x_2 + 2 = 0$$
$$x_2 = -2$$

④

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = 5^x$$
$$3^{3x-2} = 5^x$$
$$\log 3^{3x-2} = \log 5^x$$
$$(3x-2)\log 3 = x\log 5$$
$$3x\log 3 - 2\log 3 = x\log 5$$
$$x\log 3^3 - x\log 5 = 2\log 3$$
$$x(\log 27 - \log 5) = \log 3^2$$
$$x = \frac{\log 9}{\log 27 - \log 5}$$
$$x \cong 1{,}3$$

⑤

$$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$$
$$2^x 2^1 + 2^x 2^{-1} + 2^x 2^3 = \frac{21}{8}$$
$$2^x(2 + 0{,}5 + 8) = \frac{21}{8}$$
$$2^x \cdot 10{,}5 = \frac{21}{8}$$
$$2^x \cdot \frac{21}{2} = \frac{21}{8}$$
$$2^x = \frac{\frac{21}{8}}{\frac{21}{2}} = \frac{21}{8}\cdot\frac{2}{21} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$\underline{2^x = 2^{-2}}$$
$$x = -2$$

⑥

$$2^{2x}\cdot 5^x - 2^{2x-1}\cdot 5^{x+1} = -600$$
$$2^{2x}\cdot 5^x - 2^{2x}\cdot 2^{-1}\cdot 5^x\cdot 5^1 = -600$$
$$2^{2x}\cdot 5^x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot 5\right) = -600$$
$$2^{2x}\cdot 5^x\cdot\left(\frac{2}{2}-\frac{5}{2}\right) = -600$$
$$2^{2x}\cdot 5^x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -600$$
$$2^{2x}\cdot 5^x = \frac{600}{\frac{3}{2}}$$
$$2^{2x}\cdot 5^x = 600\cdot\frac{2}{3}$$
$$2^{2x}\cdot 5^x = \frac{1200}{3}$$
$$4^x\cdot 5^x = 400$$
$$\underline{20^x = 20^2}$$
$$x = 2$$

⑦

$$\frac{1}{4}\cdot 2^x + \frac{1}{2}\cdot 4^x = 9 \quad \Big|\cdot 4$$
$$\frac{4}{4}\cdot 2^x + \frac{4}{2}\cdot 4^x = 36$$
$$2^x + 2\cdot 2^x\cdot 2^x = 36$$
$$2\cdot 2^{x^2} + 2^x - 36 = 0$$
$$2^x = y$$
$$2y^2 + y - 36 = 0$$

$$y_{12} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-36)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{289}}{4} =$$
$$= \frac{-1\pm 17}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+17}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \frac{-1-17}{4} = -\frac{18}{4} = -4{,}5 \end{array}\right.$$

$y_1 = 4$	$y_2 = -4{,}5$
$2^{x_1} = 4$	$2^{x_2} = -4{,}5$
$\underline{2^{x_1} = 2^2}$	$\log 2^{x_2} = \underbrace{\log(-4{,}5)}_{\text{nemá smysl}}$
$x_1 = 2$	

32. Logaritmické funkce, logaritmus, vlastnosti

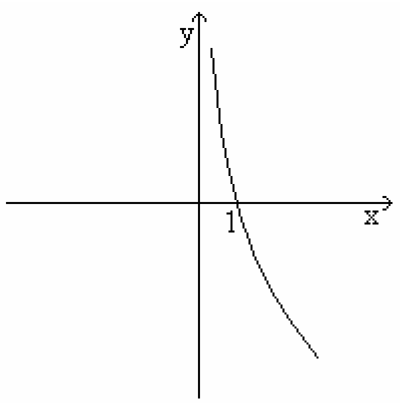
LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmická funkce o základu a ***je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci*** $y = a^x$***, kde*** a ***je libovolné kladné číslo různé od 1. Logaritmická funkce je dána výrazem*** $y = \log_a x$.

Graf funkce ....logaritmická křivka

Základní grafy:

$0 < a < 1$



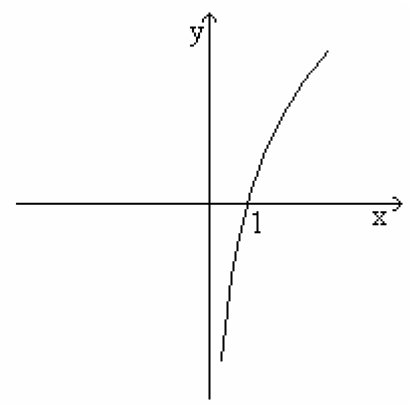
$D(f) = (0;\infty)$

$H(f) = R$

ani sudá, ani lichá
klesající
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

inverzní k funkci exponenciální

$a > 1$



$D(f) = (0;\infty)$

$H(f) = R$

ani sudá, ani lichá
rostoucí
prostá
neomezená
ani maximum, ani minimum

inverzní k funkci exponenciální

Přirozená logaritmická funkce:

$y = \ln_a x$

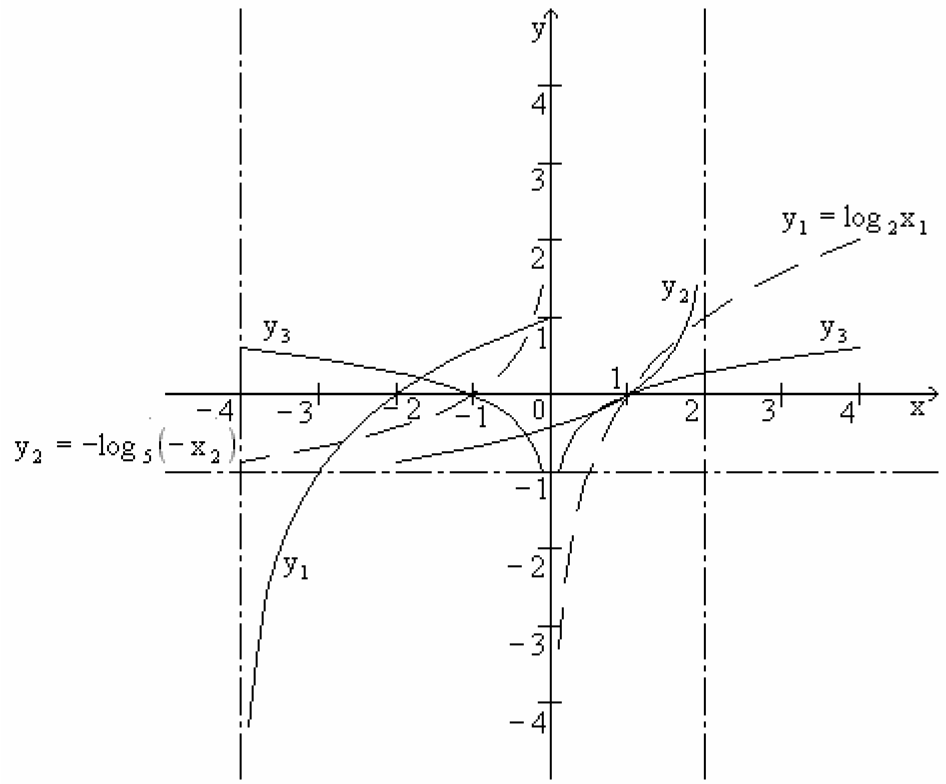
e .... Eulerovo číslo $(e \cong 2{,}72)$

Př.:

$$y_1 = \log_2(x_1+4)-1 \Rightarrow y_1 = \log_2 x_1; \begin{matrix} x_{01}+4=0 \\ x_{01}=-4 \end{matrix}; y_{01}=-1$$

$$y_2 = -\log_5(-x_2+2) \Rightarrow y_2 = -\log_5(-x_2); \begin{matrix} -x_{02}+2=0 \\ x_{02}=2 \end{matrix}; y_{02}=0$$

$$y_3 = \log|x_3| \Rightarrow y_3 = \log|x_3|; x_{03}=0; y_{03}=0$$



LOGARITMUS

Logaritmus je číslo, na které se musí umocnit základ, aby vzniklo logaritmované číslo.

$$\log_a r = v \Leftrightarrow a^v = r$$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s$

$\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$

$a \in R^+ - \{1\}; r \in R^+; s \in R^+$

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

$\log_a s^r = r \cdot \log_a s$

$a \in R^+ - \{1\}; r \in R; s \in R^+$

Typy logaritmů:

dekadický logaritmus........... $\log_{10} a = \log a$

přirozený logaritmus............ $\log_e a = \ln a$

e .... Eulerovo číslo $(e \cong 2{,}72)$

Př.:

①
$$\log_3 x = 4$$
$$x = 3^4$$
$$x = 81$$

②
$$\log x = \frac{1}{2}\log a + 2\log b$$
$$\log x = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^2$$
$$\log x = \log\sqrt{a} + \log b^2$$
$$\underline{\log x = \log\sqrt{a}\,b^2}$$
$$x = \sqrt{a}\,b^2$$

③
$$\log\frac{xy}{z} = \log xy - \log z = \log x + \log y - \log z$$

④
$$\log\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = \log\sqrt{\frac{a}{b}} - \log\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} =$$
$$= \log\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \log\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \log\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} - \log\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} =$$
$$= \left(\log a^{\frac{1}{2}} - \log b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\log a^{\frac{2}{3}} - \log b^{\frac{2}{3}}\right) =$$
$$= \log a^{\frac{1}{2}} - \log b^{\frac{1}{2}} - \log a^{\frac{2}{3}} + \log b^{\frac{2}{3}} =$$
$$= \frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{2}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b =$$
$$= \frac{3}{6}\log a - \frac{3}{6}\log b - \frac{4}{6}\log a + \frac{4}{6}\log b =$$
$$= -\frac{1}{6}\log a + \frac{1}{6}\log b$$

⑤
$$\log_a\frac{1}{27} = -3$$
$$a^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$

⑥
$$\log\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \log\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2} =$$
$$= \log\sqrt{2} + \log\sqrt[4]{2} + \log\sqrt[8]{2} =$$
$$= \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 2^{\frac{1}{4}} + \log 2^{\frac{1}{8}} =$$
$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 2 + \frac{1}{8}\log 2 = \frac{7}{8}\log 2$$

⑦
$$\log x = 2\log(a+b) - 3\log(a-b)$$
$$\log x = \log(a+b)^2 - \log(a-b)^3$$
$$\underline{\log x = \log\frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}}$$
$$x = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}$$

⑧
$$\log\frac{5x^2\cdot\sqrt{y}}{y^3} = \log 5x^2\cdot\sqrt{y} - \log y^3 =$$
$$= \log 5 + \log x^2 + \log\sqrt{y} - \log y^3 =$$
$$= \log 5 + 2\log x + \log y^{\frac{1}{2}} - 3\log y =$$
$$= \log 5 + 2\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{6}{2}\log y =$$
$$= \log 5 + 2\log x - \frac{5}{2}\log y$$

---

33. Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou jako logaritmovaný výraz nebo se neznámá vyskytuje jako základ logaritmu.

Do řešení logaritmických rovnic patří kromě podmínky také zkouška.

Př.:

①

$$\frac{5\log x+3}{3\log x-4}=\frac{\log x+5}{3\log x-4}-2 \quad \Big|\cdot(3\log x-4)$$

$$\frac{(5\log x+3)(3\log x-4)}{3\log x-4}=\frac{(\log x+5)(3\log x-4)}{3\log x-4}-2(3\log x-4)$$

$$5\log x+3=\log x+5-2(3\log x-4)$$

$$5\log x+3=\log x+5-(6\log x-8)$$

$$5\log x+3=\log x+5-6\log x+8$$

$$5\log x+3=-5\log x+13$$

$$10\log x=10$$

$$\log x=\frac{10}{10}$$

$$\log x=1$$

$$x=10$$

Podmínky:

$\underline{x>0}$

$$3\log x-4\neq 0$$

$$3\log x\neq 4$$

$$\log x\neq\frac{4}{3}$$

$$x\neq 10^{\frac{4}{3}}$$

Zkouška:

$$\frac{5\log x+3}{3\log x-4}=\frac{\log x+5}{3\log x-4}-2$$

$$\frac{5\log 10+3}{3\log 10-4}=\frac{\log 10+5}{3\log 10-4}-2$$

$$\frac{5+3}{3-4}=\frac{1+5}{3-4}-2$$

$$-\frac{8}{1}=-\frac{6}{1}-2$$

$$-8=-6-2$$

$$-8=-8$$

②

$$\log(x+2)-\log(x-1)=2-\log 4$$
$$\log\frac{x+2}{x-1}=\log 100-\log 4$$
$$\log\frac{x+2}{x-1}=\log\frac{100}{4}$$
$$\log\frac{x+2}{x-1}=\log 25$$
$$\frac{x+2}{x-1}=25 \quad \Big|\cdot(x-1)$$
$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=25(x-1)$$
$$x+2=25x-25$$
$$27=24x$$
$$\frac{27}{24}=x$$
$$\frac{9}{8}=x$$

Podmínky:

$$x+2>0$$
$$\underline{x-1>0}$$
$$x>-2$$
$$\underline{x>1}$$
$$x>1$$

Zkouška:

$$\log(x+2)-\log(x-1)=2-\log 4$$
$$\log\left(\frac{9}{8}+2\right)-\log\left(\frac{9}{8}-1\right)=2-\log 4$$
$$\log\left(\frac{9}{8}+\frac{16}{8}\right)-\log\left(\frac{9}{8}-\frac{8}{8}\right)=2-\log 4$$
$$\log\frac{25}{8}-\log\frac{1}{8}=\log 100-\log 4$$
$$\log\frac{\frac{25}{8}}{\frac{1}{8}}=\log\frac{100}{4}$$
$$\log\left(\frac{25}{8}\cdot\frac{8}{1}\right)=\log 25$$
$$\log 25=\log 25$$

③

$$\log^2 x+2\log x-3=0$$
$$\underline{(\log x)^2+2\log x-3=0}$$
$$\underline{\log x=y}$$
$$y^2+2y-3=0$$
$$y_{12}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1\\[4pt] \frac{-2-4}{2}=-\frac{6}{2}=-3\end{array}\right.$$

$\underline{y_1=1}$	$\underline{y_2=-3}$
$\log x_1=1$	$\log x_2=-3$
$x_1=10$	$x_2=0{,}001$

Podmínky:

$$x>0$$

Zkouška:

$$\log^2 x_1+2\log x_1-3=0$$
$$\log^2 10+2\log 10-3=0$$
$$1^2+2-3=0$$
$$1+2-3=0$$
$$0=0$$

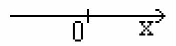
$$\log^2 x_2+2\log x_2-3=0$$
$$\log^2 0{,}001+2\log 0{,}001-3=0$$
$$(-3)^2+2\cdot(-3)-3=0$$
$$9-6-3=0$$
$$0=0$$

34. Vektor, operace s vektory

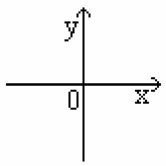
SOUSTAVA SOUŘADNIC, SOUŘADNICE BODŮ

Kartézská soustava souřadnic (ortonormální soustava souřadnic) – je to taková soustava souřadnic, která má všechny osy navzájem kolmé a na všech osách jsou jednotky stejné délky. Dělí se podle počtu os:

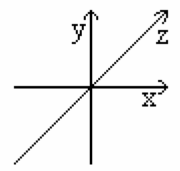
- přímka – jednorozměrný prostor E_1 – $A[x_A]$



- rovina – dvojrozměrný prostor E_2 – $A[x_A; y_A]$

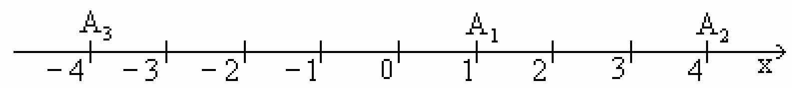


- prostor – trojrozměrný prostor E_3 – $A[x_A; y_A; z_A]$

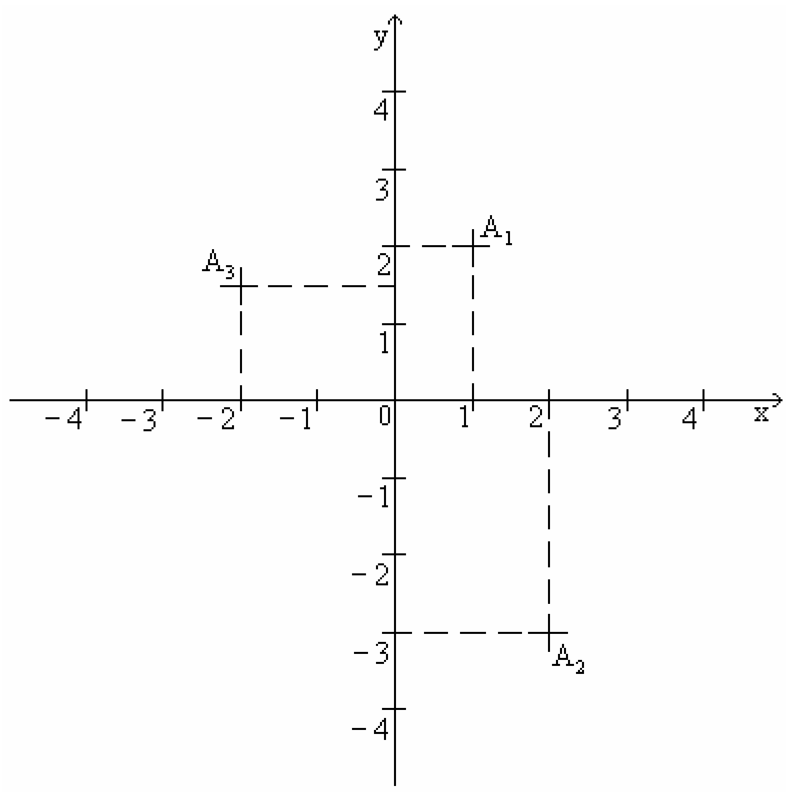


Př.:

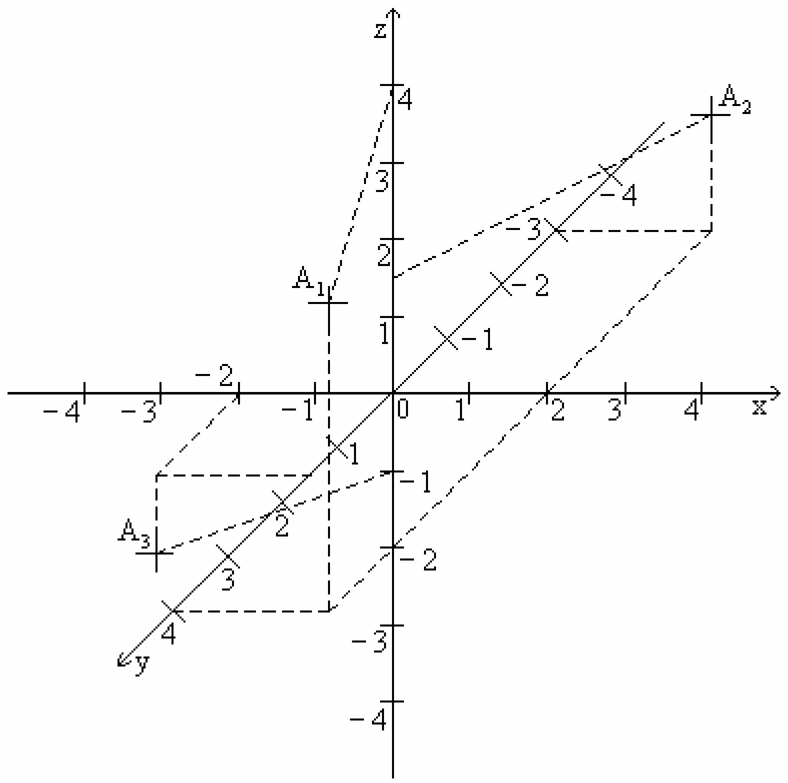
① $A_1[1]$
$A_2[4]$
$A_3[-2]$



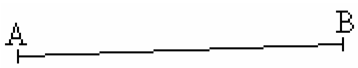
② $A_1[1;2]$
$A_2[2;-3]$
$A_3[-2;1,5]$



③ $A_1[2;4;4]$
$A_2[2;-3;1{,}5]$
$A_3[-2;1{,}5;-1]$

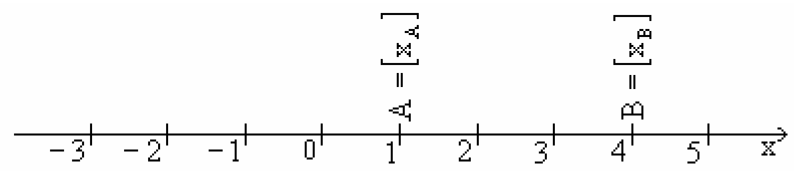


VZDÁLENOST DVOU BODŮ



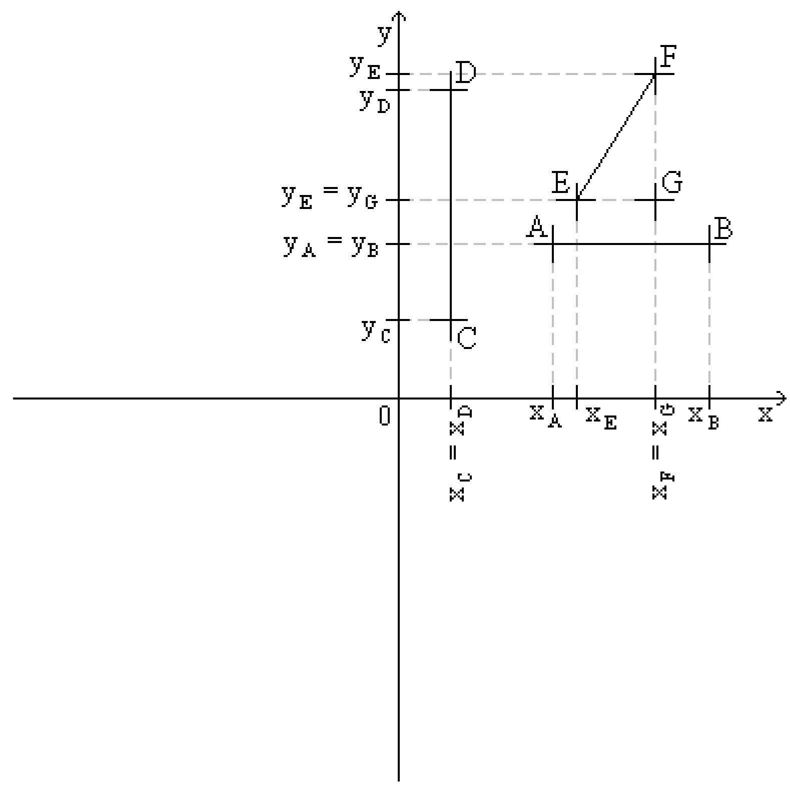
Vzdálenost bodů A, B je rovna velikosti úsečky $|AB|$.

Vzdálenost na přímce:



$$|AB| = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|$$

Vzdálenost v rovině:



$|AB| = |x_A - x_B|$

$|CD| = |y_C - y_D|$

ΔEFG je pravoúhlý

$|EF|^2 = |EG|^2 + |FG|^2$

$|EF|^2 = |x_E - x_F|^2 + |y_E - y_F|^2$

$|EF|^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2$

$|EF| = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$

Vzdálenost v prostoru:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

Př.:

Jaká je vzdálenost mezi danými body?

① $A = [-2]; B = [7]$

$|AB| = |x_A - x_B| = |-2 - 7| = |-9| = 9$

② $A = [-1;-1]; B = [11;-6]$

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[11 - (-1)]^2 + [-6 - (-1)]^2} = \sqrt{(11+1)^2 + (-6+1)^2} =$

$= \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

③ $A = [-1;5;1]; B = [1;1;-2]$

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + (1-5)^2 + (-2-1)^2} =$

$= \sqrt{(1+1)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$

STŘED ÚSEČKY

Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic obou krajních bodů.

$$S = \frac{A+B}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x_S &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_S &= \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_S &= \frac{z_A + z_B}{2} \end{aligned}$$

Př.:

Jaké souřadnice mají středy daných úseček?

① $A = [-2]; B = [7]$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+7}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S = \left[\frac{5}{2}\right]$$

② $A = [-1;-1]; B = [11;-6]$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+(-6)}{2} = \frac{-1-6}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$S = \left[5;-\frac{7}{2}\right]$$

③ $A = [-1;5;1]; B = [1;1;-2]$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

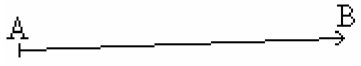
$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$z_S = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left[0;3;-\frac{1}{2}\right]$$

VEKTORY

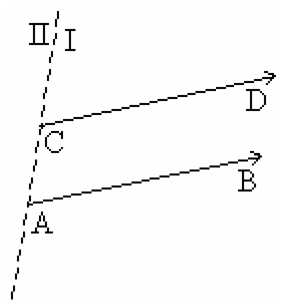
Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ - 

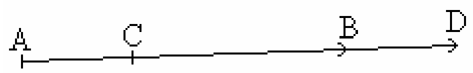
A … počáteční bod
B … koncový bod

Nulová orientovaná úsečka – úsečka, u které počáteční a koncový bod splývají

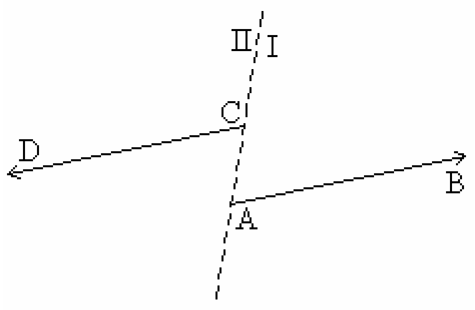
Rovnoběžnost orientovaných úseček:



souhlasně rovnoběžné orientované úsečky
koncové body náleží téže polorovině

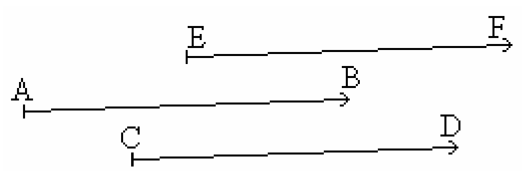


splývající rovnoběžné orientované úsečky



nesouhlasně rovnoběžné orientované úsečky
koncové body nenáleží téže polorovině

Velikost orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ - $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$



Vektor – množina všech orientovaných úseček, které mají stejný směr a velikost.

Označení vektoru $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Souřadnice vektoru:

$A = [x_A; y_A; z_A]; B = [x_B; y_B; z_B]$

$x_u = x_B - x_A$

$y_u = y_B - y_A$

$z_u = z_B - z_A$

$\vec{u} = (x_u; y_u; z_u)$

Př.:

Jaké souřadnice má vektor daný dvěma body?

$A=[3;2]; B=[7;10]$

$x_u = x_B - x_A = 7-3=4$
$y_u = y_B - y_A = 10-2=8$
$\vec{u}=(4;8)$

Velikost vektoru:

$|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}| = |AB|$

$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$

Operace s vektory:

rovnost vektorů

$\vec{u}=(x_u;y_u;z_u); \vec{v}=(x_v;y_v;z_v)$

$$\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_u = x_v \\ y_u = y_v \\ z_u = z_v \end{array}$$

opačný vektor

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

$\overrightarrow{BA}=-\vec{u}$

opačný vektor má stejnou velikost a je nesouhlasně rovnoběžný

$\vec{u}=(x_u;y_u;z_u); -\vec{u}=(-x_u;-y_u;-z_u)$

$\vec{u}+(-\vec{u})=0$

násobení konstantou

$\vec{u}=(x_u;y_u;z_u); \vec{v}=(x_v;y_v;z_v)$

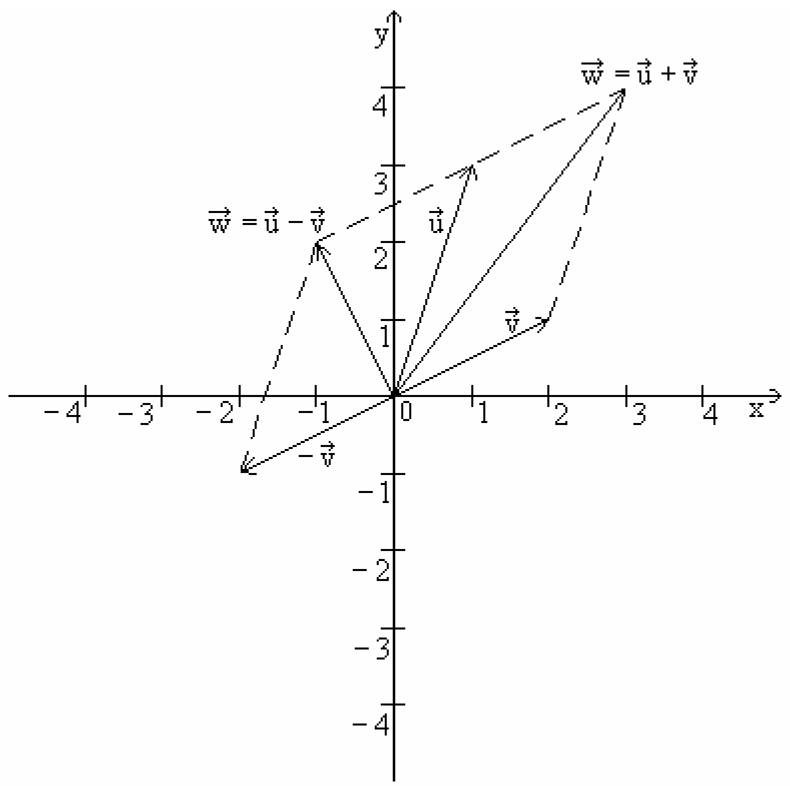
$$\vec{u}=k\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_u = k\cdot x_v \\ y_u = k\cdot y_v \\ z_u = k\cdot z_v \end{array}$$

sčítání vektorů

$$\vec{u} = (x_u; y_u; z_u)$$
$$\vec{v} = (x_v; y_v; z_v)$$
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$x_w = x_u + x_v$$
$$y_w = y_u + y_v$$
$$z_w = z_u + z_v$$
$$\vec{w} = (x_w; y_w; z_w)$$

rozdíl vektorů

$$\vec{u} = (x_u; y_u; z_u)$$
$$\vec{v} = (x_v; y_v; z_v)$$
$$\vec{w} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$$
$$x_w = x_u - x_v$$
$$y_w = y_u - y_v$$
$$z_w = z_u - z_v$$
$$\vec{w} = (x_w; y_w; z_w)$$



Př.:

$\vec{u} = (-2;3); \vec{v} = (4;5)$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$
$x_w = x_u + x_v = -2 + 4 = 2$	$x_w = x_u - x_v = -2 - 4 = -6$
$y_w = y_u + y_v = 3 + 5 = 8$	$y_w = y_u - y_v = 3 - 5 = -2$
$\vec{w} = (2;8)$	$\vec{w} = (-6;-2)$

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ

Dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ ***jsou lineárně závislé, lze-li jeden z nich napsat jako násobek druhého vektoru.***

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}; k \in R$$

Tři vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ***jsou lineárně závislé, lze-li jeden z nich vyjádřit ve tvaru:*** $\vec{w} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}; k, l \in R$. ***Vektor*** $\vec{w}$ ***se pak nazývá lineární kombinací vektorů*** $\vec{u}$ ***a*** $\vec{v}$.

Př.:

① $\vec{u} = (2;-1;0); \vec{v} = (4;-2;0)$

$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$x_u = k \cdot x_v \Rightarrow 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$y_u = k \cdot y_v \Rightarrow -1 = -2k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$z_u = k \cdot z_v \Rightarrow 0 = 0k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$

vektory jsou lineárně závislé

② $\vec{u} = (1;2;3); \vec{v} = (2;-1;1); \vec{w} = (-4;7;3)$

$\vec{w} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$

$x_w = k \cdot x_u + l \cdot x_v \Rightarrow -4 = k + 2l \rightarrow k = -4 - 2l$

$y_w = k \cdot y_u + l \cdot y_v \Rightarrow 7 = 2k - l \rightarrow \quad 7 = 2(-4-2l) - l$

$7 = -8 - 4l - l$

$7 = -8 - 5l$

$5l = -8 - 7$

$5l = -15$

$l = -3$

$z_w = k \cdot z_u + l \cdot z_v \Rightarrow 3 = 3k + l \rightarrow \quad 3 = 3(-4-2l) + l$

$3 = -12 - 6l + l$

$3 = -12 - 5l$

$5l = -12 - 3$

$5l = -15$

$l = -3$

$k = -4 - 2l = -4 - 2 \cdot (-3) = -4 + 6 = 2$

$7 = 2k - l$	$3 = 3k + l$
$7 = 2k - (-3)$	$3 = 3k - 3$
$7 = 2k + 3$	$3 + 3 = 3k$
$7 - 3 = 2k$	$6 = 3k$
$4 = 2k$	$2 = k$
$2 = k$	

$k = 2$

$l = -3$

$-4 = k + 2l$	$7 = 2k - l$	$3 = 3k + l$
$-4 = 2 + 2 \cdot (-3)$	$7 = 2 \cdot 2 - (-3)$	$3 = 3 \cdot 2 + (-3)$
$-4 = 2 - 6$	$7 = 4 + 3$	$3 = 6 - 3$
$-4 = -4$	$7 = 7$	$3 = 3$

$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

vektory jsou lineárně závislé

ÚHEL DVOU VEKTORŮ

souhlasně rovnoběžné vektory … $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$

nesouhlasně rovnoběžné vektory … $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$

v rovině

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

v prostoru

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Př.:

$\vec{u} = (-2;1;2); \vec{v} = (-2;-2;1)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(-2)\cdot(-2) + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{4-2+2}{9} = \frac{4}{9}$$

$\varphi = 63°36'44''$

SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

na přímce $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v$

v rovině $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$

v prostoru $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$

Je-li výsledek skalárního součinu vektrorů nulový, pak jsou vektory na sebe kolmé.

Př.:

Jakou velikost má y_v?

$\vec{u} = (1;-2;3); \vec{v} = (4; y_v; -2); \vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$
$$-2 = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot y_v + 3 \cdot (-2)$$
$$-2 = 4 - 2y_v - 6$$
$$-2 = -2 - 2y_v$$
$$2y_v = -2 + 2$$
$$2y_v = 0$$
$$y_v = 0$$

VEKTOROVÝ SOUČIN DVOU VEKTORŮ

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce je nulový vektor.

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ neležících na jedné přímce je vektor $\vec{w}$, který má tyto vlastnosti:

- vektor $\vec{w}$ je kolmý k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$
- směr vektoru $\vec{w}$ se dá určit *pravidlem pravé ruky*
- $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$

  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} = (x_u; y_u; z_u)$$
$$\vec{v} = (x_v; y_v; z_v)$$
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

y_u	z_u	x_u	y_u
y_v	z_v	x_v	y_v

$$x_w = y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v$$
$$y_w = z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v$$
$$x_w = x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v$$
$$\vec{w} = (x_w; y_w; z_w)$$

Př.:

$\vec{u} = (1;3;-1); \vec{v} = (2;4;5)$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

3	−1	1	3
4	5	2	4

$x_w = y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = 15 + 4 = 19$

$y_w = z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 5 = -2 - 5 = -7$

$x_w = x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

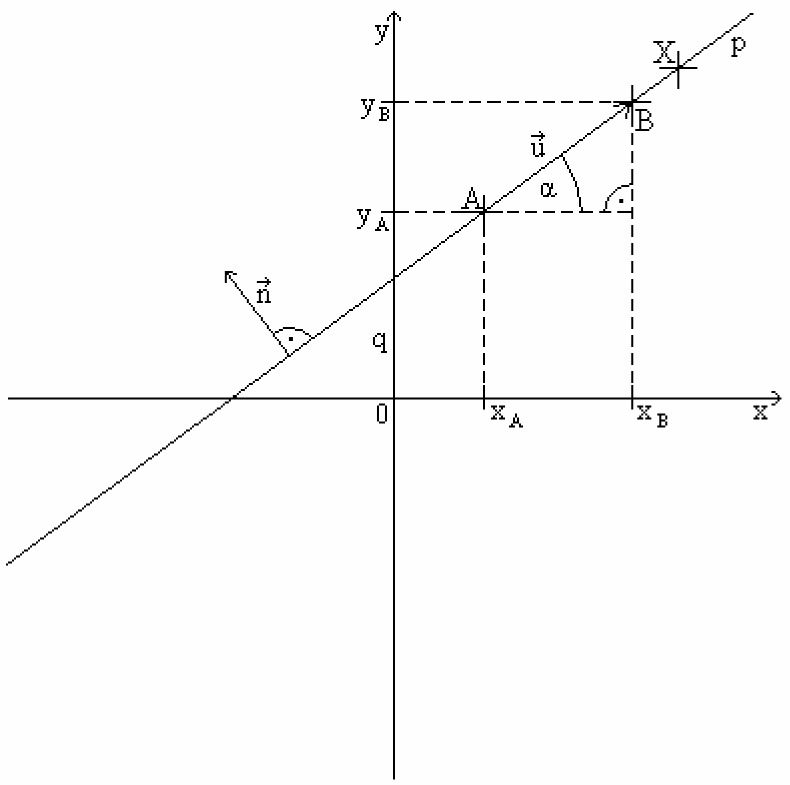
$\vec{w} = (x_w; y_w; z_w) = (19;-7;-2)$

$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$

$\vec{w} = (-19;7;2)$

35. Analytická geometrie - přímky v rovině a prostoru

V ROVINĚ



p … přímka
q … úsek
$\vec{u}$ … směrový vektor přímky
$\vec{n}$ … normálový vektor přímky

$A = [x_A; y_A]$
$B = [x_B; y_B]$
$X = [x; y]$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (x_u; y_u)$
$\vec{n} = (x_n; y_n) = (y_u; -x_u) = (-y_u; x_u)$

Parametrické rovnice přímky:

$\overrightarrow{AX} \parallel \vec{u}$ t … parametr, $t \in R$

$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}$

$X - A = t \cdot \vec{u}$

$\underline{X = A + t \cdot \vec{u}}$

$x = x_A + x_u t$

$y = y_A + y_u t$

Př.:

① a) jaké jsou parametrické rovnice přímky p, je-li dán bod A a směrový vektor $\vec{u}$?

b) jaké souřadnice mají body B ležící na dané přímce, je-li parametr t roven 0; 1; -2; $\frac{1}{2}$?

a)
$$A=[1;-2];\ \vec{u}=(-2;3)$$
$$x=x_A+x_u t=1+(-2)t=1-2t$$
$$y=y_A+y_u t=-2+3t$$

b)
$$t_1=0$$
$$x_1=x_A+x_u t=1-2t_1=1-2\cdot 0=1$$
$$y_1=y_A+y_u t-2+3t_1=-2+3\cdot 0=-2$$
$$B_1=[1;-2]$$

$$t_2=1$$
$$x_2=1-2t_2=1-2\cdot 1=-1$$
$$y_2=-2+3t_2=-2+3\cdot 1=1$$
$$B_2=[-1;1]$$

$$t_3=-2$$
$$x_3=1-2t_3=1-2\cdot(-2)=1+4=5$$
$$y_3=-2+3t_3=-2+3\cdot(-2)=-2-6=-8$$
$$B_3=[5;-8]$$

$$t_4=\frac{1}{2}$$
$$x_4=1-2t_4=1-2\cdot\frac{1}{2}=0$$
$$y_4=-2+3t_4=-2+3\cdot\frac{1}{2}=-\frac{4}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$
$$B_4=\left[0;-\frac{1}{2}\right]$$

② Náleží body M a N přímce p?

$$M=[5;3];\ N=[-15,5;0]$$
$$p:\begin{matrix}x=-5+3t\\ y=7+2t\end{matrix}$$

$\underline{M=[5;3]}$	$\underline{N=[-15,5;0]}$
$x=-5+3t$	$x=-5+3t$
$\underline{y=7+2t}$	$\underline{y=7+2t}$
$5=-5+3t$	$-15,5=-5+3t$
$\underline{3=7+2t}$	$\underline{0=7+2t}$
$5+5=3t$	$-15,5+5=3t$
$\underline{3-7=2t}$	$\underline{-7=2t}$
$10=3t$	$-10,5=3t$
$\underline{-4=2t}$	$\underline{-3,5=t}$
$\frac{10}{3}=t$	$-3,5=t$
$\underline{-2=t}$	$\underline{-3,5=t}$
$M\notin p$	$N\in p$

Obecná rovnice přímky:

$ax+by+c=0$

$\vec{n}=(a;b)$ … normálový vektor přímky je nenulový vektor, který je k dané přímce kolmý

Př.:

Jaká je obecná rovnice přímky p, je-li dán bod A a normálový vektor $\vec{n}$?

$A = [-1;2]; \vec{n} = (3;2)$

$$ax + by + c = 0$$
$$3x + 2y + c = 0$$
$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + c = 0$$
$$-3 + 4 + c = 0$$
$$1 + c = 0$$
$$c = -1$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

Směrnicový tvar přímky:

$$y = kx + q$$

$k = tg\alpha = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ … směrnice přímky

q … úsek – bod, ve kterém přímka protíná osu y

Př.:

Jaký je směrnicový tvar přímky p, jsou-li dány bod A a B?

$A = [0;0]; B = [1;\sqrt{3}]$

$$k = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sqrt{3} - 0}{1 - 0} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$$

$$A = [0;0] \Rightarrow q = 0$$

$$y = \sqrt{3}x + 0 = \sqrt{3}x$$

Převody rovnic přímek:

$$\vec{u} = (x_u; y_u)$$

$$\vec{n} = (x_n; y_n) = (y_u; -x_u) = (-y_u; x_u)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = x_u \cdot x_n + y_u \cdot y_n = x_u \cdot y_u - y_u \cdot x_u = -x_u \cdot y_u + y_u \cdot x_u = 0$$

parametrická → obecná

$$x = x_A + x_u t$$
$$y = y_A + y_u t$$
$$\Downarrow$$
$$A = [x_A; y_A] = [a; b]$$
$$\vec{u} = (x_u; y_u) \Rightarrow \vec{n} = (y_u; -x_u) = (-y_u; x_u) = (x_n; y_n)$$
$$\Downarrow$$
$$ax + by + c = 0$$

obecná → parametrická

$$ax + by + c = 0$$
$$\Downarrow$$
$$A = [a; b] = [x_A; y_A]$$
$$\vec{n} = (x_n; y_n) \Rightarrow \vec{u} = (y_n; -x_n) = (-y_n; x_n) = (x_u; y_u)$$
$$\Downarrow$$
$$x = x_A + x_u t$$
$$y = y_A + y_u t$$

obecná → směrnicová

$$ax + by + c = 0$$
$$\Downarrow$$
$$by = -ax - c$$
$$y = \frac{-ax - c}{b}$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$
$$\Downarrow$$
$$x = kx + q$$

Př.:

Jaké jsou ostatní rovnice přímky $-2x + 3y - 1 = 0$?

parametrické rovnice

$$\vec{n} = (-2;3) \Rightarrow \vec{u} = (3;2) = (-3;-2)$$
$$A: \quad volba: x = 1$$
$$-2 \cdot 1 + 3y - 1 = 0$$
$$y = 1$$
$$A = [1;1]$$
$$\Downarrow$$
$$x = 1 + 3t$$
$$y = 1 + 2t$$

směrnicový tvar

$$3y = 2x + 1$$
$$y = \frac{2x + 1}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

V PROSTORU

Parametrické rovnice přímky:

$\underline{X = A + \vec{u} \cdot t}$

$x = x_A + x_u t$

$y = y_A + y_u t$

$z = z_A + z_u t$

Př.:

① Jakou rovnici má přímka, je-li dána body A a B?

$A = [3;-2;5]; B = [4;2;-2]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4-3;2+2;-2-5) = (1;4;-7)$

$x = 3 + t$

$y = -2 + 4t$

$z = 5 - 7t$

② Leží dané body na přímce?

$p: \quad x = 5 - 2t \qquad A = [7;-7;6]$

$\quad\;\; y = -3 + 4t \qquad B = [0;0;0]$

$\quad\;\; z = 2 - 4t \qquad C = [2;-2;8]$

$x_A = 5 - 2t_A$	$y_A = -3 + 4t_A$	$z_A = 2 - 4t_A$
$7 = 5 - 2t_A$	$-7 = -3 + 4t_A$	$6 = 2 - 4t_A$
$2t_A = 5 - 7$	$-7 + 3 = 4t_A$	$4t_A = 2 - 6$
$2t_A = -2$	$-4 = 4t_A$	$4t_A = -4$
$t_A = -1$	$-1 = t_A$	$t_A = -1$

$A \in p$

$x_B = 5 - 2t_B$	$y_B = -3 + 4t_B$	$z_B = 2 - 4t_B$
$0 = 5 - 2t_B$	$0 = -3 + 4t_B$	$0 = 2 - 4t_B$
$2t_B = 5$	$3 = 4t_B$	$4t_B = 2$
$t_B = \frac{5}{2}$	$\frac{3}{4} = t_B$	$t_B = \frac{1}{2}$

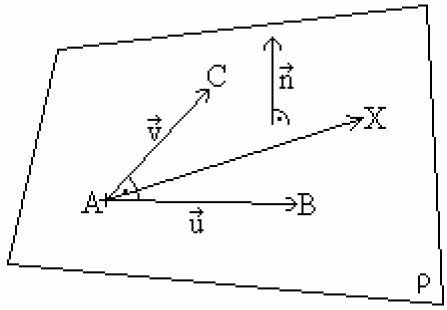
$B \notin p$

$x_C = 5 - 2t_C$	$y_C = -3 + 4t_C$	$z_C = 2 - 4t_C$
$2 = 5 - 2t_C$	$-2 = -3 + 4t_C$	$8 = 2 - 4t_C$
$2t_C = 5 - 2$	$-2 + 3 = 4t_C$	$4t_C = 2 - 8$
$2t_C = 3$	$1 = 4t_C$	$4t_C = -6$
$t_C = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{4} = t_C$	$t_C = -\frac{3}{2}$

$C \notin p$

---

36. Analytická geometrie - roviny



ρ … rovina
$\vec{u}, \vec{v}$ … směrové vektor roviny
$\vec{n}$ … normálový vektor roviny

$A = [x_A; y_A; z_A]$
$B = [x_B; y_B; z_B]$
$C = [x_C; y_C; z_C]$
$X = [x; y; z]$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (x_u; y_u; z_u)$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (x_v; y_v; z_v)$
$\vec{n} = (x_n; y_n; z_n)$

Parametrické rovnice roviny:

$\overrightarrow{AX} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$

$X - A = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

$\underline{X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$

$x = x_A + x_u t + x_v s$

$y = y_A + y_u t + y_v s$

$z = z_A + z_u t + z_v s$

Př.:
Jakou rovnici má rovina, je-li dána body A, B a C?
$A = [0;0;4]; B = [3;2;-1]; C = [0;5;2]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3-0; 2-0; -1-4) = (3;2;-5)$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0-0; 5-0; 2-4) = (0;5;-2)$

$x = 0 + 3t + 0s = 3t$

$y = 0 + 2t + 5s = 2t + 5s$

$z = 4 - 5t - 2s$

Obecná rovnice roviny:

$ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n} = (a; b; c)$ … normálový vektor roviny je nenulový vektor, který je k dané rovině kolmý a je tedy kolmý ke směrovým vektorům dané roviny

Př.:

Jakou rovnici má rovina, je-li dána bodem A a normálovým vektorem $\vec{n}$?

$A = [2;2;5]; \vec{n} = (3;2;-1)$

$3x + 2y - z + d = 0$

$3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 5 + d = 0$

$6 + 4 - 5 + d = 0$

$5 + d = 0$

$d = -5$

$3x + 2y - z - 5 = 0$

Zvláštní případy obecné rovnice:

a)	$d = 0$ … rovina prochází počátkem	$3x - 2y - z = 0$
b)	$z = 0$ … rovina je rovnoběžná s osou z	$3x - 2y - 10 = 0$
c)	$x = 0, d = 0$ … rovina obsahuje osu x	$y - 3x = 0$
d)	$y = 0, z = 0$ … rovina je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou yz	$2x + 3 = 0$
e)	$y = 0, z = 0, d = 0$ … rovina yz	$x = 0$
f)	$x = 0, y = 0$ … rovina je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xy	$z - 1{,}5 = 0$

Převod parametrických rovnic na rovnici obecnou:

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Př.:

Jakou má rovina obecnou rovnici, je-li dána rovnicemi parametrickými?

$x = 3 - 2t + 3s$

$y = 1 + t - 2s$

$z = 3 - 4t + s$

$A = [3;1;3]; \vec{u} = (-2;1;-4); \vec{v} = (3;-2;1)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$x_n = y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v = 1 \cdot 1 - (-4) \cdot (-2) = 1 - 8 = -7$

$y_n = z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v = (-4) \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = -12 - (-2) = -12 + 2 = -10$

$x_n = x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$

$\vec{n} = (-7;-10;1)$

$-7x - 10y + z + d = 0$

$(-7) \cdot 3 - 10 \cdot 1 + 3 + d = 0$

$-21 - 10 + 3 + d = 0$

$-28 + d = 0$

$d = 28$

$-7x - 10y + z + 28 = 0$

---

37. Analytická geometrie – vzájemná poloha přímky a roviny, dvou rovin

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A ROVINY

p … přímka
ρ … rovina

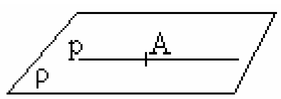
rovnoběžné

$\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\rho} = 0$

splývající $p \subset \rho$

$A \in p$

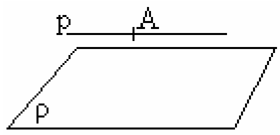
$A \in \rho$



různé $p \not\subset \rho$

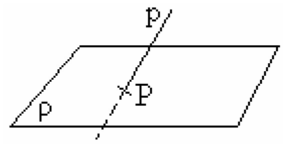
$A \in p$

$A \notin \rho$



různoběžné

$\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\rho} \neq 0$



průsečík P – z parametrické rovnice přímky p se dosadí do rovnice roviny ρ → vyjádří se parametr t_p → parametr se dosadí zpět do parametrických rovnic přímky p a vyjdou souřadnice průsečíku P

Př.:

Jaká je vzájemná poloha přímky a roviny?

① $p: \; x_p = t_p$

$y_p = 1 - t_p$

$z_p = 3 - 2t_p$

$\rho: \; 3x + 5y - z - 2 = 0$

$\overrightarrow{u_p} = (1;-1;-2); \overrightarrow{n_p} = (3;5;-1)$

$\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_p} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) =$

$= 3 - 5 + 2 = 0$

rovnoběžné

$A = [0;1;3]$

$3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 3 - 2 = 0$

$5 - 3 - 2 = 0$

$0 = 0$

$A \in \rho$

splývající

② $p: \; x_p = 2 + t_p$

$y_p = 3 + 2t_p$

$z_p = 1 - t_p$

$\rho: \; x - 2y + z - 5 = 0$

$\overrightarrow{u_p} = (1;2;-1); \overrightarrow{n_p} = (1;-2;1)$

$\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_p} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 =$

$= 1 - 4 - 1 = -4$

různoběžné

$x - 2y + z - 5 = 0$

$(2 + t_p) - 2(3 + 2t_p) + (1 - t_p) - 5 = 0$

$2 + t_p - 6 - 4t_p + 1 - t_p - 5 = 0$

$-8 - 4t_p = 0$

$-8 = 4t_p$

$-2 = t_p$

$x = 2 + t_p = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$

$y = 3 + 2t_p = 3 + 2 \cdot (-2) = 3 - 4 = -1$

$z = 1 - t_p = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$

$P = [0;-1;3]$

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU ROVIN

ρ, σ … rovina

rovnoběžné

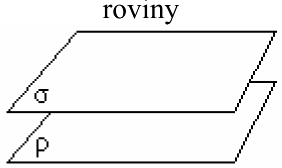
$$\overrightarrow{n_\rho} = k \cdot \overrightarrow{n_\sigma}$$

splývající

jedna obecná rovnice roviny je násobkem druhé obecné rovnice roviny

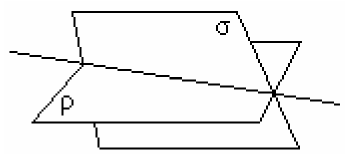
různé

jedna obecná rovnice roviny není násobkem druhé obecné rovnice roviny



různoběžné

$$\overrightarrow{n_\rho} \neq k \cdot \overrightarrow{n_\sigma}$$



průsečnice p – přímka, jejíž směrový vektor $\overrightarrow{u_p}$ se vypočítá vektorovým součinem normálových vektorů $\overrightarrow{n_\rho}$ a $\overrightarrow{n_\sigma}$ rovin ρ a σ → směrový vektor $\overrightarrow{u_p}$ přímky p se dosadí do obecných rovnic rovin ρ a σ → vypočítají se souřadnice bodu A tak, že se dosadí do jedné ze souřadnic libovolné číslo (např. $x = 0$) a zbylé souřadnice se dopočítají jako soustava dvou rovnic o dvou neznámých → z bodu A a směrového vektoru $\overrightarrow{u_p}$ přímky p lze vytvořit parametrické rovnice průsečnice p

---

Př.:

Jaká je vzájemná poloha dvou rovin?

① $\rho: \quad 3x_\rho + y_\rho - 5z_\rho - 12 = 0$

$\sigma: \quad 2x_\sigma + 6z_\sigma - 3 = 0$

$$\overrightarrow{n_\rho} = (3;1;-5); \overrightarrow{n_\sigma} = (2;0;-3)$$

$$\overrightarrow{n_\rho} \neq k \cdot \overrightarrow{n_\sigma}$$

různoběžné

$$\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{n_\rho} \times \overrightarrow{n_\sigma}$$

$$x_p = y_\rho \cdot z_\sigma - z_\rho \cdot y_\sigma = 1 \cdot 6 - (-5) \cdot 0 =$$
$$= 6 - 0 = 6$$
$$y_p = z_\rho \cdot x_\sigma - x_\rho \cdot z_\sigma = (-5) \cdot 2 - 3 \cdot 6 =$$
$$= -10 - 18 = -28$$
$$z_p = x_\rho \cdot y_\sigma - y_\rho \cdot x_\sigma = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = 0 - 2 = -2$$
$$\overrightarrow{u_p} = (6;-28;-2)$$

$$x = 0$$

$$2 \cdot 0 + 6z - 3 = 6z - 3 \Rightarrow 6z = 3 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$3 \cdot 0 + y - 5z - 12 = y - 5z - 12 \Rightarrow y = 5z + 12 = \frac{5}{2} + 12 = \frac{5 + 24}{2} = \frac{27}{2}$$

$$A = \left[0; \frac{27}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

$$p: \quad x_p = 6t_p$$
$$y_p = \frac{27}{2} - 28t_p$$
$$z_p = \frac{1}{2} - 2t_p$$

② $\rho: \quad 3x_\rho + 7y_\rho + z_\rho + 4 = 0$

$\sigma: \quad 9x_\sigma + 21y_\sigma + 3z_\sigma + 12 = 0$

$$\overrightarrow{n_\rho} = (3;7;1); \overrightarrow{n_\sigma} = (9;21;3)$$

$$\overrightarrow{n_\rho} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{n_\sigma}$$

rovnoběžné

$$9x_\sigma + 21y_\sigma + 3z_\sigma + 12 = 0$$
$$3 \cdot (3x_\sigma + 7y_\sigma + z_\sigma + 4) = 0$$

splývající

38. Analytická geometrie – vzájemná poloha dvou přímek v rovině a prostoru

V ROVINĚ

p, q … přímky

$\overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}$ … směrové vektory přímek p a q

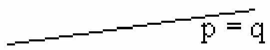
$\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_q}$ … normálové vektory přímek p a q

rovnoběžné

$\overrightarrow{u_p} = k \cdot \overrightarrow{u_q}; \overrightarrow{n_p} = k \cdot \overrightarrow{n_q}$

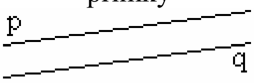
splývající

jedna obecná rovnice přímky je násobkem druhé obecné rovnice přímky



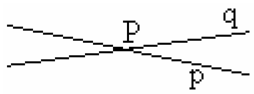
různé

jedna obecná rovnice přímky není násobkem druhé obecné rovnice přímky



různoběžné

$\overrightarrow{u_p} \neq k \cdot \overrightarrow{u_q}; \overrightarrow{n_p} \neq k \cdot \overrightarrow{n_q}$



průsečík P – bod, ve kterém se přímky p a q protínají – vypočítá se převedením rovnic přímek p a q na parametrické rovnice, u kterých se porovnají x-ové a y-ové části, z nichž vzniknou dvě rovnice o dvou neznámých – parametry t a s, poté se jeden z těchto parametrů dosadí do parametrických rovnic přímky (t do p nebo s do q) a vypočítá se průsečík P

Př.:

Jaká je vzájemná poloha přímky a roviny?

① p: $x_p = 1 + 3t$ q: $x_q = 2 - 4s$

$y_p = 2 - t$ $y_q = 1 + s$

$\overrightarrow{u_p} = (3;-1); \overrightarrow{u_q} = (-4;1)$

$\overrightarrow{u_p} \neq k \cdot \overrightarrow{u_q}$

různoběžné

$$x_p = x_q \qquad y_p = y_q$$
$$1 + 3t = 2 - 4s \qquad 2 - t = 1 + s$$
$$3t + 4s = 2 - 1 \qquad 2 - 1 = t + s$$
$$3t + 4s = 1 \qquad t + s = 1$$

$$3t + 4s = 1$$
$$\underline{t + s = 1 \Rightarrow t = 1 - s}$$
$$3(1 - s) + 4s = 1 \qquad t = 1 - s$$
$$3 - 3s + 4s = 1 \qquad t = 1 - (-2)$$
$$s = 1 - 3 \qquad t = 1 + 2$$
$$s = -2 \qquad t = 3$$

P: $x_p = 1 + 3t = 1 + 3 \cdot 3 = 1 + 9 = 10$

$y_p = 2 - t = 2 - 3 = -1$

$P = [10;-1]$

② p: $3x_p + 2y_p - 1 = 0$

q: $-6x_q - 4y_q + 2 = 0$

$\overrightarrow{n_p} = (3;2); \overrightarrow{n_q} = (-6;-4)$

$\overrightarrow{n_p} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{n_q}$

rovnoběžné

$-6x_q - 4y_q + 2 = 0$

$(-2) \cdot (3x_q + 2y_q - 1) = 0$

splývající

V PROSTORU

p, q … přímky

$\overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}$ … směrové vektory přímek p a q

$\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_q}$ … normálové vektory přímek p a q

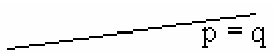
rovnoběžné

$\overrightarrow{u_p} = k \cdot \overrightarrow{u_q}; \overrightarrow{n_p} = k \cdot \overrightarrow{n_q}$

splývající

$A \in p$

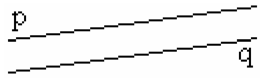
$A \in q$



různé

$A \in p$

$A \notin q$

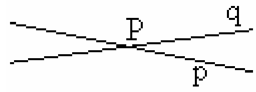


nerovnoběžné

$\overrightarrow{u_p} \neq k \cdot \overrightarrow{u_q}; \overrightarrow{n_p} \neq k \cdot \overrightarrow{n_q}$

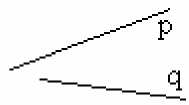
různoběžné

P existuje



mimoběžné

P neexistuje



průsečík P – bod, ve kterém se přímky p a q protínají – vypočítá se z parametrických rovnic přímek p a q, u kterých se porovnají x-ové, y-ové a z-ové části, z nichž vzniknou dvě rovnice o dvou neznámých – parametry t a s, poté se jeden z těchto parametrů dosadí do parametrických rovnic přímky (t do p nebo s do q) a vypočítá se průsečík P

Př.:

Jaká je vzájemná poloha přímky a roviny?

① $p: \; x_p = -1 + 3t \quad q: \; x_q = -49 + 48s$

$y_p = 3 + t \qquad y_q = -37 + 37s$

$z_p = 2t \qquad z_q = 4s$

$\overrightarrow{n_p} = (3;1;2); \overrightarrow{n_q} = (48;37;4)$

$\overrightarrow{n_p} \neq k \cdot \overrightarrow{n_q}$

nerovnoběžné

$$x_p = x_q \qquad y_p = y_q$$

$$-1 + 3t = -49 + 48s \qquad 3 + t = -37 + 37s$$

$$3t - 48s = -48 \qquad t - 37s = -40$$

$$z_p = z_q$$

$$2t = 4s$$

$$t = 2s$$

$3t - 48s = -48$

$3 \cdot 2s - 48s = -48$

$6s - 48s = -48$

$-42s = -48$

$s = \frac{48}{42}$

$s = \frac{8}{7}$

$t - 37s = -40$

$2s - 37s = -40$

$-35s = -40$

$s = \frac{40}{35}$

$s = \frac{8}{7}$

P :

$$x_q = -49 + 48s = -49 + 48 \cdot \frac{8}{7} =$$

$$= -49 + \frac{384}{7} = \frac{-343 + 384}{7} = \frac{41}{7}$$

$$y_q = -37 + 37s = -37 + 37 \cdot \frac{8}{7} =$$

$$= -37 + \frac{296}{7} = \frac{-343 + 296}{7} = -\frac{47}{7}$$

$$z_q = 4s = 4 \cdot \frac{8}{7} = \frac{32}{7}$$

$$P = \left[\frac{41}{7}; -\frac{47}{7}; \frac{32}{7}\right]$$

② $p: \; x_p = 1 + 3t \quad q: \; x_q = 3 - 6s$

$y_p = 2 - t \qquad y_q = 1 + 2s$

$z_p = 3 + 2t \qquad z_q = -1 - 4s$

$\overrightarrow{n_p} = (3;-1;2); \overrightarrow{n_q} = (-6;2;-4)$

$\overrightarrow{n_p} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{n_q}$

rovnoběžné

$A \in p; A = [1;2;3]$

$x_q = 3 - 6s \Rightarrow 1 = 3 - 6s \Rightarrow 6s = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$

$y_q = 1 + 2s \Rightarrow 2 = 1 + 2s \Rightarrow 1 = 2s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

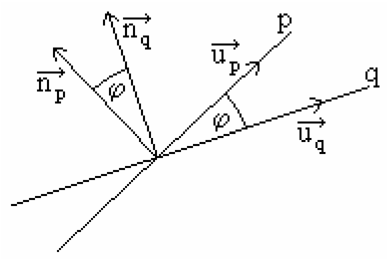
$z_q = -1 - 4s \Rightarrow 3 = -1 - 4s \Rightarrow 4s = -4 \Rightarrow s = -1$

různé

39. Analytická geometrie – metrické úlohy metodou souřadnic

ODCHYLKY

Dvě přímky v rovině:



Odchylka $\varphi \in \langle 0°;90° \rangle$ ***dvou přímek ze směrových (normálových) vektorů*** $\vec{u_p}, \vec{u_q}$ $\left(\vec{n_p}, \vec{n_q}\right)$ ***se vypočítá podle vzorce:***

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u_p} \cdot \vec{u_q}\right|}{\left|\vec{u_p}\right| \cdot \left|\vec{u_q}\right|} = \frac{\left|\vec{n_p} \cdot \vec{n_q}\right|}{\left|\vec{n_p}\right| \cdot \left|\vec{n_q}\right|}$$

Př.:

$p: \quad 2x - 3y + 3 = 0$

$q: \quad 5x - y - 10 = 0$

$\vec{n_p} = (2;-3); \vec{n_q} = (5;-1)$

$$\left|\vec{n_p} \cdot \vec{n_q}\right| = |2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1)| = |10 + 3| = |13| = 13$$

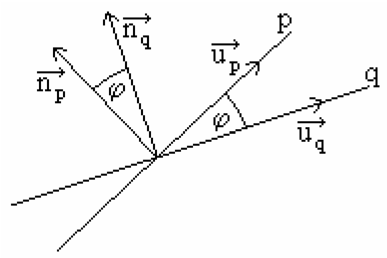
$$\left|\vec{n_p}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\left|\vec{n_q}\right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n_p} \cdot \vec{n_q}\right|}{\left|\vec{n_p}\right| \cdot \left|\vec{n_q}\right|} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} =$$

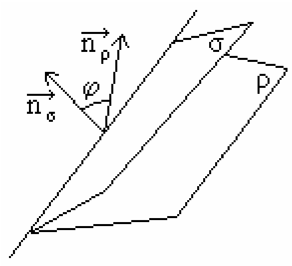
$$= \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°$$

Dvě přímky v prostoru:



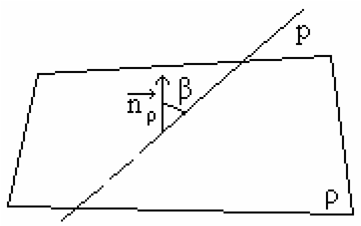
$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u_p} \cdot \vec{u_q}\right|}{\left|\vec{u_p}\right| \cdot \left|\vec{u_q}\right|}$$

Dvě roviny v prostoru:



$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n_\rho} \cdot \vec{n_\sigma}\right|}{\left|\vec{n_\rho}\right| \cdot \left|\vec{n_\sigma}\right|}$$

Přímka a rovina:



$$\cos\beta = \frac{\left|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho\right|}{\left|\vec{u}_p\right| \cdot \left|\vec{n}_\rho\right|}$$

$$\varphi = 90° - \beta$$

Př.:

① $p: \; x = 1 + t, \; y = -4t, \; z = -3 + t$ $\qquad q: \; x = 2s, \; y = -2 - 2s, \; z = -s$

$\vec{u}_p = (1;-4;1)$ $\qquad \vec{u}_q = (2;-2;-1)$

$$\left|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q\right| = \left|1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1)\right| =$$
$$= \left|2 + 8 - 1\right| = \left|9\right| = 9$$
$$\left|\vec{u}_p\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} =$$
$$= \sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$\left|\vec{u}_q\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} =$$
$$= \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q\right|}{\left|\vec{u}_p\right| \cdot \left|\vec{u}_q\right|} = \frac{9}{3\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°$$

② $p: \; x = 1 + t, \; y = -4t, \; z = -3 + t$ $\qquad \rho: \; 2x - 2y - z + 1 = 0$

$\vec{n}_\rho = (2;-2;-1)$

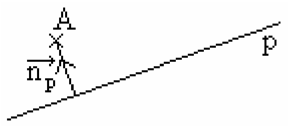
$\vec{u}_p = (1;-4;1)$

$$\left|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho\right| = \left|1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1)\right| =$$
$$= \left|2 + 8 - 1\right| = \left|9\right| = 9$$
$$\left|\vec{u}_p\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} =$$
$$= \sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$\left|\vec{n}_\rho\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} =$$
$$= \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\beta = \frac{\left|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho\right|}{\left|\vec{u}_p\right| \cdot \left|\vec{n}_\rho\right|} = \frac{9}{3\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45°$$
$$\varphi = 90° - \beta = 90° - 45° = 45°$$

VZDÁLENOSTI

Bod a přímka v rovině:

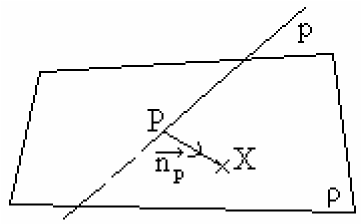


$$p: \quad ax + by + c = 0$$
$$A = [x_A; y_A]$$
$$v = \frac{|ax_A + by_A + c|}{|\overrightarrow{n_p}|}$$

Bod a přímka v prostoru:

$$p: \quad x = x_A + x_u t \qquad X = [x_X; y_X; z_X]$$
$$y = y_A + y_u t$$
$$z = z_A + z_u t$$

Vypočítat obecnou rovnici roviny ρ, která je kolmá k přímce p a obsahuje bod X:



$$\overrightarrow{u_p} = (x_u; y_u; z_u) = (a; b; c)$$
$$\rho: \quad ax_X + by_X + cz_X + d = 0 \Rightarrow d$$
$$ax + by + cz + d = 0$$

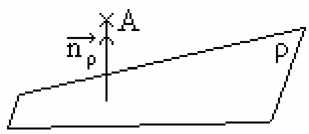
Vypočítat souřadnice bodu P, který je průsečíkem přímky p s rovinou ρ:

$$P: \quad a(x_A + x_u t) + b(y_A + y_u t) + c(z_A + z_u t) + d = 0 \Rightarrow t$$
$$x_P = x_A + x_u t$$
$$y_P = y_A + y_u t$$
$$z_P = z_A + z_u t$$
$$P = [x_P; y_P; z_P]$$

Vzdálenost bodu a přímky:

$$v = |\overrightarrow{XP}|$$

Bod a rovina:



$$\rho: \quad ax + by + cz + d = 0$$
$$A = [x_A; y_A; z_A]$$
$$v = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\overrightarrow{n_\rho}|}$$

Př.:

① $p: \quad 3x - 4y + 5 = 0$

$A = [-1; 1]$

$$v = \frac{|ax_A + by_A + c|}{|\overrightarrow{n_p}|} = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 4 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

② $p: \quad x = 3 + t \qquad X = [0;2;3]$

$y = 5 + 2t$

$z = -t$

$\overrightarrow{u_p} = (1;2;-1)$

$\rho: \quad ax_X + by_X + cz_X + d = 0$

$1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + d = 0$

$0 + 4 - 3 + d = 0$

$1 + d = 0$

$d = -1$

$x + 2y - z - 1 = 0$

$P: \quad a(x_A + x_u t) + b(y_A + y_u t) + c(z_A + z_u t) + d = 0$

$(3 + t) + 2(5 + 2t) - (-t) - 1 = 0$

$3 + t + 10 + 4t + t - 1 = 0$

$6t + 12 = 0$

$6t = -12$

$t = -2$

$x_P = x_A + x_u t = 3 + t = 3 + (-2) = 3 - 2 = 1$

$y_P = y_A + y_u t = 5 + 2t = 5 + 2(-2) = 5 - 4 = 1$

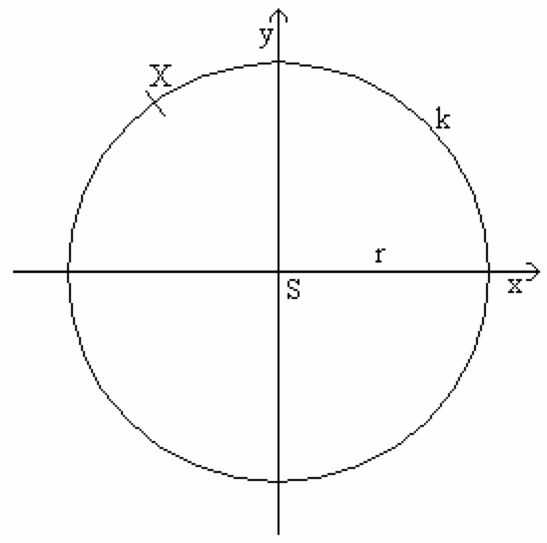
$z_P = z_A + z_u t = -t = -(-2) = 2$

$P = [x_P; y_P; z_P] = [1;1;2]$

$\overrightarrow{XP} = (x_p - x_X; y_P - y_X; z_P - z_X) = (1 - 0; 1 - 2; 2 - 3) = (1;-1;-1)$

$v = \left|\overrightarrow{XP}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

40. Analytická geometrie kuželoseček – kružnice



***Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu* S *stejnou vzdálenost* r.**

$r = |XS|$ … poloměr kružnice

$S = [m; n]$ … střed kružnice

$X = [x; y]$ … bod ležící na kružnici

$x^2 + y^2 = r^2$ … středová rovnice kružnice se středem v bodě $S = [0;0]$

$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ … středová rovnice kružnice se středem v bodě $S = [m; n]$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ … obecná rovnice kružnice

Poloha bodů na kružnici dané středovou rovnicí:

$x^2 + y^2 = r^2$ … bod leží na kružnici

$x^2 + y^2 < r^2$ … bod leží uvnitř kružnice

$x^2 + y^2 > r^2$ … bod leží vně kružnice

Toto platí i pro kružnice dané středovou rovnicí $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

Převod rovnic:

středová → obecná

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

$$(x^2 - 2xm + m^2) + (y^2 - 2yn + n^2) = r^2$$

$$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 - 2yn + n^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \underbrace{- 2xm}_{a} \underbrace{- 2yn}_{b} + \underbrace{m^2 + n^2 - r^2}_{c} = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

obecná → středová

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

výrazy $x^2 + ax$ a $y^2 + by$ se doplní na vzorec typu

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0$$

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Př.:

① Jaká je středová rovnice kružnice?

$S=[0;0];X=[-3;2]$

$$x^2+y^2=r^2$$
$$(-3)^2+2^2=r^2$$
$$9+4=r^2$$
$$13=r^2$$

$$x^2+y^2=13$$

② Jakou polohu mají dané body vzhledem ke kružnici?

$S=[0;0];r=2$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

$A=[4;3]$	$B=[1;1]$	$C=[2;0]$
$4^2+3^2=4$	$1^2+1^2=4$	$2^2+0^2=4$
$16+9=4$	$1+1=4$	$4+0=4$
$25>4$	$2<4$	$4=4$

③ Jaká bude středová a obecná rovnice kružnice?

$S=[1;-2];r=3$

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$
$$\underline{(x-1)^2+(y+2)^2=9}$$
$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=9$$
$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-9=0$$
$$x^2+y^2-2x+4y+1+4-9=0$$
$$x^2+y^2-2x+4y+-4=0$$

④ Jaká bude středová rovnice kružnice?

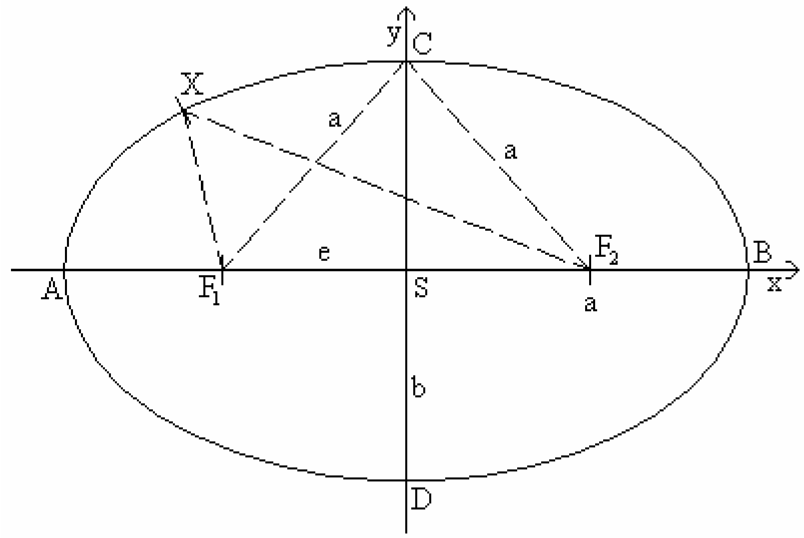
$$x^2+y^2+8x-10y-75=0$$
$$x^2+8x+y^2-10y-75=0$$
$$(x^2+8x+16)-16+(y^2-10y+25)-25-75=0$$
$$(x+16)^2+(y-5)^2-116=0$$
$$(x+16)^2+(y-5)^2=116$$

⑤ Jaká bude středová rovnice kružnice?

$$x^2+y^2-2x+4y+7=0$$
$$x^2-2x+y^2+4y+7=0$$
$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4+7=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+2=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2=-2$$
$$r^2\neq-2$$

$x^2+y^2-2x+4y+7=0$ není rovnice kružnice

41. Analytická geometrie kuželoseček – elipsa



Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou stálých bodů F_1, F_2 (ohnisek) stálý součet vzdáleností, který je větší, než vzdálenost těchto bodů (2e).

$S = [m; n]$ … střed elipsy
F_1, F_2 … ohniska elipsy
$X = [x; y]$ … bod ležící na elipse
A, B … hlavní vrcholy elipsy
C, D … vedlejší vrcholy elipsy
přímka F_1F_2 … hlavní osa elipsy
vedlejší osa elipsy … přímka, která je kolmá na hlavní osu elipsy a prochází středem S

$a = |AS| = |BS|$ … velikost hlavní poloosy elipsy
$b = |CS| = |DS|$ … velikost vedlejší poloosy elipsy
$e = |F_1S| = |F_2S|$ … výstřednost (excentricita) elipsy

$$a^2 = b^2 + e^2$$

Středové rovnice elipsy:

hlavní osa je rovnoběžná s osou x

$S = [0;0]$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$S = [m;n]$
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

hlavní osa je rovnoběžná s osou y

$S = [0;0]$
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$S = [m;n]$
$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

Obecná rovnice elipsy:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
$A > 0; B > 0; A \neq B$

Poloha bodů na kružnici dané středovou rovnicí:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ … bod leží na elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ … bod leží uvnitř elipsy

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ … bod leží vně elipsy

Toto platí i pro elipsy dané středovou rovnicí $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

Převod rovnic se provádí v podstatě stejně, jako u kružnice.

Př.:

① Jaká je středová rovnice elipsy?

$a = 3; b = 5; S = [0;0]$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

② Jaká je obecná rovnice elipsy?

$$\left(x + \sqrt{2}\right)^2 + \frac{\left(y - \sqrt{2}\right)^2}{4} = 1$$

$$\left(x + \sqrt{2}\right)^2 + \frac{\left(y - \sqrt{2}\right)^2}{4} = 1 \quad |\cdot 4$$
$$4\left(x + \sqrt{2}\right)^2 + \frac{4\left(y - \sqrt{2}\right)^2}{4} = 4$$
$$4\left(x + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 4$$
$$4\left(x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\right) + \left(y^2 - 2\sqrt{2}y + 2\right) = 4$$
$$4x^2 + 8\sqrt{2}x + 8 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 - 4 = 0$$
$$4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 8 + 2 - 4 = 0$$
$$4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6 = 0$$
$$4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -6$$

③ Jaké jsou středová rovnice elipsy, velikost a, b, e a souřadnice S, F_1, F_2, A, B, C a D?

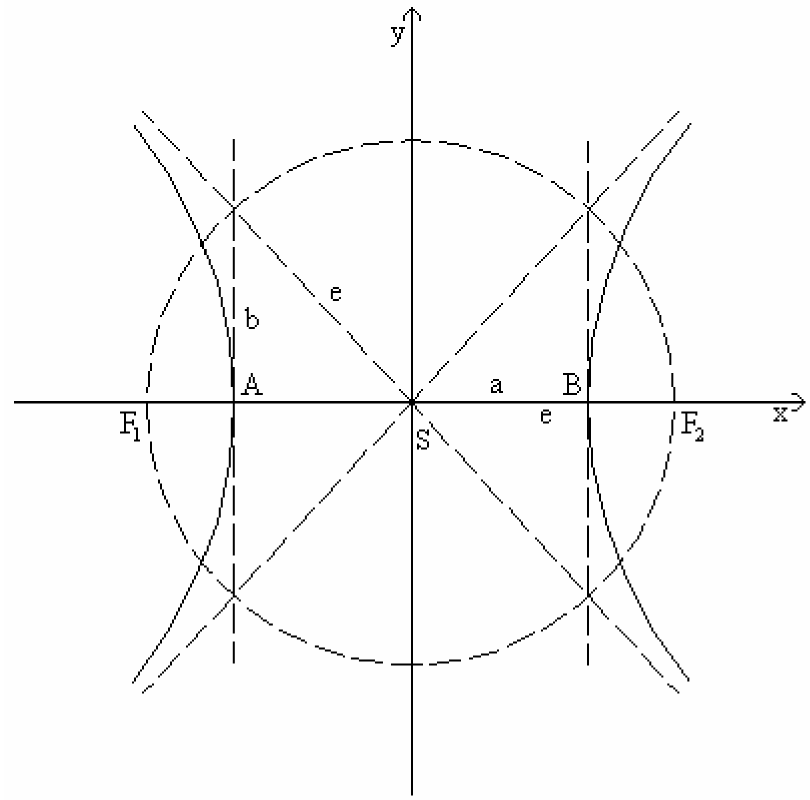
$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$
$$4\left(x^2 - 2x\right) + 9\left(y^2 - 4y\right) + 4 = 0$$
$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1\cdot 4 + 9\left(y^2 - 4y + 4\right) - 4\cdot 9 + 4 = 0$$
$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 - 4 - 36 + 4 = 0$$
$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \quad |:36$$
$$\frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$
$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$S = [m;n] = [1;2]$$
$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$
$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$
$$a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$$F_1 = [m - e; n] = \left[1 - \sqrt{5}; 2\right]$$
$$F_2 = [m + e; n] = \left[1 + \sqrt{5}; 2\right]$$
$$A = [m - a; n] = [-2;2]$$
$$B = [m + a; n] = [4;2]$$
$$C = [m; n + b] = [1;4]$$
$$D = [m; n - b] = [1;0]$$

42. Analytická geometrie kuželoseček – hyperbola



Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od bodů F_1, F_2 (ohnisek) je rovna kladné konstantě.

$S=[m;n]$ … střed hyperboly

F_1, F_2 … ohniska hyperboly

A, B … hlavní hyperboly

přímka F_1F_2 … hlavní osa hyperboly

vedlejší osa hyperboly … přímka, která je kolmá na hlavní osu a prochází středem S

$a=|AS|=|BS|$ … velikost hlavní poloosy hyperboly

$e=|F_1S|=|F_2S|$ … výstřednost (excentricita) hyperboly $\quad e^2=a^2+b^2$

$b=\sqrt{e^2-a^2}$ … velikost vedlejší poloosy hyperboly

Středové rovnice hyperboly:

hlavní osa je rovnoběžná s osou x

$S=[0;0]$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$S=[m;n]$ $\quad \dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$

asymptoty hyperboly

$$(y-n)=\pm\frac{b}{a}(x-m)$$

hlavní osa je rovnoběžná s osou y

$S=[0;0]$ $\quad -\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

$S=[m;n]$ $\quad -\dfrac{(x-m)^2}{b^2}+\dfrac{(y-n)^2}{a^2}=1$

asymptoty hyperboly

$$(y-n)=\pm\frac{a}{b}(x-m)$$

Obecná rovnice hyperboly:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Převod rovnic se provádí v podstatě stejně, jako u kružnice.

Př.:

① Jaká je středová rovnice hyperboly?

$a = 12; e = 20; S = [2;4]$

$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} =$

$= \sqrt{256} = 16$

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{16^2} + \frac{(y-4)^2}{12^2} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{256} + \frac{(y-4)^2}{144} = 1$$

② Jaká je obecná rovnice hyperboly?

$$-\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$-\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \quad |\cdot 9$$

$$-\frac{9(x+3)^2}{9} + \frac{9(y+2)^2}{9} = 1 \cdot 9$$

$$-(x+3)^2 + (y+2)^2 = -9$$

$$-(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 9 = 0$$

$$-x^2 - 6x - 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 = 0$$

$$-x^2 + y^2 - 6x + 4y - 9 + 4 - 9 = 0$$

$$-x^2 + y^2 - 6x + 4y - 14 = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$x^2 - y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$$

③ Jaké jsou středová rovnice hyperboly, velikost a, b, e a souřadnice S, F_1, F_2, A a B?

$4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$

$$4x^2 - 9(y^2 - 2y) - 45 = 0$$

$$4x^2 - 9(y^2 - 2y + 1) + 9 - 45 = 0$$

$$4x^2 - 9(y-1)^2 - 36 = 0$$

$$4x^2 - 9(y-1)^2 = 36 \quad |:36$$

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$S = [m;n] = [0;1]$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

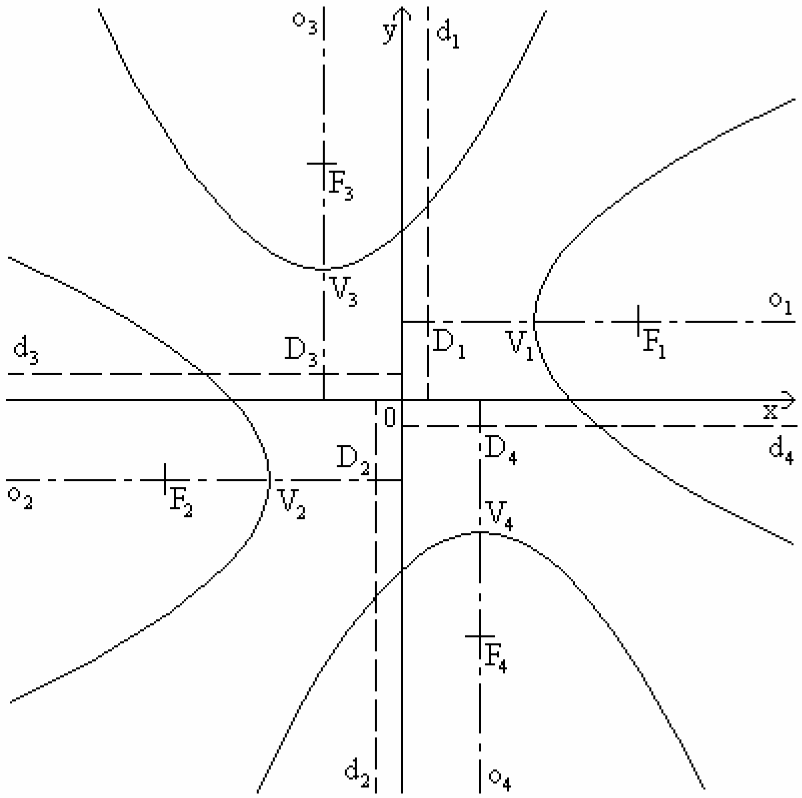
$$F_1 = [m-a;n] = [-3;1]$$

$$F_2 = [m+a;n] = [3;1]$$

$$A = [m-e;n] = [-\sqrt{13};1]$$

$$B = [m+e;n] = [\sqrt{13};1]$$

43. Analytická geometrie kuželoseček – parabola



***Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu* F *a od dané přímky* d*,* $F \notin d$.**

F … ohnisko paraboly
V … vrchol paraboly (střed FD)
d … řídící přímka paraboly
o … osa paraboly $(F \in o, o \perp d)$
$p = |FD|$ … parametr paraboly (vzdálenost ohniska od řídicí přímky)

Vrcholové rovnice paraboly:

osa paraboly je rovnoběžná s osou x		osa paraboly je rovnoběžná s osou y	
$V = [0;0]$	$V = [0;0]$	$V = [0;0]$	$V = [0;0]$
kladná poloosa	záporná poloosa	kladná poloosa	záporná poloosa
$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
$V = [m;n]$	$V = [m;n]$	$V = [m;n]$	$V = [m;n]$
kladná poloosa	záporná poloosa	kladná poloosa	záporná poloosa
$(y-n)^2 = 2p(x-m)$	$(y-n)^2 = -2p(x-m)$	$(x-m)^2 = 2p(y-n)$	$(x-m)^2 = -2p(y-n)$

Obecné rovnice paraboly:

osa paraboly je rovnoběžná s osou x	osa paraboly je rovnoběžná s osou y
$y^2 + ax + by + c = 0$	$x^2 + ax + by + c = 0$
$a \neq 0$	$b \neq 0$

Převod rovnic se provádí v podstatě stejně, jako u kružnice.

Př.:

① Jaké bude mít daná parabola souřadnice ohniska, vrcholu, parametr a rovnici řídící přímky?

$$y^2 = 6x \Rightarrow o \| x; V = [0;0]$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 6x \\ y^2 = 2px \end{array}\right\} 2p = 6 \Rightarrow p = 3$$

$$|VF| = \frac{1}{2} \cdot p = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow F = \left[\frac{3}{2};0\right]$$

$$|DV| = \frac{1}{2} \cdot p = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow D = \left[-\frac{3}{2};0\right]$$

$$d: \quad x = -\frac{3}{2}$$

② Jaká bude rovnice paraboly?

$$V = [0;0], F = [0;-2] \Rightarrow x^2 = -2py$$

$$|VF| = \frac{1}{2} \cdot p \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \cdot p \Rightarrow 2 \cdot 2 = p \Rightarrow 4 = p$$

$$x^2 = -2 \cdot 4y \Rightarrow x^2 = -8y$$

③ Jaká bude rovnice paraboly, která prochází bodem A a má osu rovnoběžnou s osou y?

$$V = [-2;1], A = [0;3], o \| y$$

$$(x-m)^2 = 2p(y-n)$$

$$(x+2)^2 = 2p(y-1)$$

$$(0+2)^2 = 2p(3-1)$$

$$2^2 = 2p \cdot 2$$

$$4 = 4p$$

$$1 = p$$

$$(x+2)^2 = 2 \cdot 1(y-1)$$

$$(x+2)^2 = 2(y-1)$$

④ Jaká bude vrcholová rovnice paraboly?

$$2x^2 - 6x - 10y - 3 = 0$$

$$2(x^2 - 3x) - 10y - 3 = 0$$

$$2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 10y - 3 = 0$$

$$2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 2 \cdot \frac{9}{4} - 10y - 3 = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{18}{4} - 10y - 3 = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} - 10y - \frac{6}{2} = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 10y - \frac{15}{2} = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 10y + \frac{15}{2} \quad |:2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5y + \frac{\frac{15}{2}}{2}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5y + \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5y + \frac{15}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5\left(y + \frac{3}{4}\right)$$

44. Analytická geometrie – vzájemná poloha kuželosečky a přímky

VZÁJEMNÁ POLOHA KUŽELOSEČKY A PŘÍMKY

Kružnice:

$p: \quad y = kx + q \qquad k: \quad x^2 + y^2 = r^2$

řešení soustavy dvou rovnic – kvadratická rovnice:

- 2 řešení $\rightarrow$ sečna
- 1 řešení $\rightarrow$ tečna
- 0 řešení $\rightarrow$ vnější přímka

Elipsa:

$p: \quad y = kx + q \qquad e: \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

řešení soustavy dvou rovnic – kvadratická rovnice:

- 2 řešení $\rightarrow$ sečna
- 1 řešení $\rightarrow$ tečna
- 0 řešení $\rightarrow$ vnější přímka

Hyperbola:

$p: \quad y = kx + q \qquad h: \quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

řešení soustavy dvou rovnic – kvadratická rovnice:

- 2 řešení $\rightarrow$ sečna
- 1 řešení $\rightarrow$ tečna
- 0 řešení $\rightarrow$ vnější přímka

řešení soustavy dvou rovnic – lineární rovnice:

- 1 řešení $\rightarrow$ rovnoběžka s asymptotou
- 0 řešení $\rightarrow$ asymptota

Parabola:

$př: \quad y = kx + q \qquad pa: \quad y^2 = 2px$

řešení soustavy dvou rovnic – kvadratická rovnice:

- 2 řešení $\rightarrow$ sečna
- 1 řešení $\rightarrow$ tečna
- 0 řešení $\rightarrow$ vnější přímka

řešení soustavy dvou rovnic – lineární rovnice:

- $\rightarrow$ rovnoběžka s osou paraboly

TEČNY KUŽELOSEČEK

	rovnice kuželosečky	**rovnice tečny v bodě** $T = [x_T; y_T]$
Kružnice:	$x^2 + y^2 = r^2$	$x \cdot x_T + y \cdot y_T = r^2$
	$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$	$(x-m)(x_T-m) + (y-n)(y_T-n) = r^2$
	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	$x \cdot x_T + y \cdot y_T + \frac{a}{2}(x + x_T) + \frac{b}{2}(y + y_T) + c = 0$
Elipsa:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x \cdot x_T}{a^2} + \frac{y \cdot y_T}{b^2} = 1$
	$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-m)(x_T-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_T-n)}{b^2} = 1$
	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{x \cdot x_T}{b^2} + \frac{y \cdot y_T}{a^2} = 1$
	$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-m)(x_T-m)}{b^2} + \frac{(y-n)(y_T-n)}{a^2} = 1$
	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	$x \cdot x_T + y \cdot y_T + \frac{a}{2}(x + x_T) + \frac{b}{2}(y + y_T) + c = 0$

Hyperbola:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{x\cdot x_T}{a^2}-\frac{y\cdot y_T}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(x-m)(,x_T-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(y_T-n)}{b^2}=1$$

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad -\frac{x\cdot x_T}{b^2}+\frac{y\cdot y_T}{a^2}=1$$

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1 \qquad -\frac{(x-m)(x_T-m)}{b^2}+\frac{(y-n)(y_T-n)}{a^2}=1$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad x\cdot x_T+y\cdot y_T+\frac{a}{2}(x+x_T)+\frac{b}{2}(y+y_T)+c=0$$

Parabola:

$$y^2=\pm 2px \qquad y\cdot y_T=\pm p(x+x_T)$$

$$(y-n)^2=\pm 2p(x-m) \qquad (y-n)(y_T-n)=\pm p(x+x_T-2m)$$

$$x^2=\pm 2py \qquad x\cdot x_T=\pm p(y+y_T)$$

$$(x-m)^2=\pm 2p(y-n) \qquad (x-m)(x_T-m)=\pm p(y+y_T-2n)$$

$$y^2+ax+by+c=0 \qquad y\cdot y_T+\frac{a}{2}(x+x_T)+\frac{b}{2}(y+y_T)+c=0$$

$$x^2+ax+by+c=0 \qquad x\cdot x_T+\frac{a}{2}(x+x_T)+\frac{b}{2}(y+y_T)+c=0$$

Př.:

① Jaká je vzájemná poloha přímky a paraboly?

př : $3x-7y+30=0 \Rightarrow x=\frac{7y-30}{3}$

pa : $y^2=9x$

$$y^2=9x$$
$$y^2=9\cdot\frac{7y-30}{3}$$
$$y^2=\frac{9(7y-30)}{3}$$
$$y^2=3(7y-30)$$
$$y^2=21y-90$$
$$y^2-21y+90=0$$
$$y_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{21^2-4\cdot1\cdot90}}{2\cdot1}=$$
$$=\frac{21\pm\sqrt{441-360}}{2}=\frac{21\pm\sqrt{81}}{2}=$$
$$=\frac{21\pm 9}{2}\left\langle\begin{array}{l}\frac{21+9}{2}=\frac{30}{2}=15\\[4pt] \frac{21-9}{2}=\frac{12}{2}=6\end{array}\right.$$

② Jaká je vzájemná poloha přímky a paraboly?

př : $y-3=0 \Rightarrow y=3$

pa : $y^2=-4x$

$$y^2=-4x$$
$$3^2=-4x$$
$$9=-4x \quad |:(-4)$$
$$-\frac{9}{4}=x$$

Vyšla lineární rovnice → přímka je rovnoběžná s osou paraboly a protíná jí v bodě $M=\left[-\frac{9}{4};3\right]$

$$x_1=15 \Rightarrow y_1=\frac{7\cdot15-30}{3}=25$$
$$x_2=6 \Rightarrow y_2=\frac{7\cdot6-30}{3}=4$$

Přímka je sečna a protíná parabolu v bodech $M_1=[25;15]$ a $M_2=[4;6]$.

③ Jaká je vzájemná poloha přímky a elipsy?

$$p: \quad x = t$$
$$\qquad y = 10 + t$$

$$e: \quad 8x^2 + 20y^2 = 160$$

$$8x^2 + 20y^2 = 160$$
$$8t^2 + 20(10 + t)^2 = 160$$
$$8t^2 + 20(100 + 20t + t^2) = 160$$
$$8t^2 + 2000 + 400t + 20t^2 - 160 = 0$$
$$28t^2 + 400t - 1840 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-400 \pm \sqrt{400^2 - 4 \cdot 28 \cdot (-1840)}}{2 \cdot 28} =$$
$$= \frac{-400 \pm \sqrt{160000 + 206080}}{56} =$$
$$= \frac{-400 \pm \sqrt{-46080}}{2 \cdot 28}$$

vnější přímka

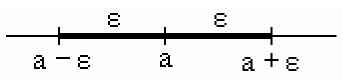
④ Jaká bude rovnice tečny?

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1; T = [2;1]$$

$$\frac{(x-3)(x_T-3)}{16} + \frac{(y-2)(y_T-2)}{4} = 1$$
$$\frac{(x-3)(2-3)}{16} + \frac{(y-2)(1-2)}{4} = 1$$
$$\frac{(x-3)(-1)}{16} + \frac{(y-2)(-1)}{4} = 1$$
$$-\frac{(x-3)}{16} - \frac{(y-2)}{4} = 1 \quad |\cdot 16$$
$$-(x-3) - 4(y-2) = 16$$
$$-x + 3 - 4y + 8 = 16$$
$$-4y + 11 = x + 16$$
$$-4y = x + 16 - 11$$
$$-4y = x + 5 \quad |:(-4)$$
$$y = -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}$$

45. Limita a spojitost funkce

DIFERENCIÁLNÍ POČET – OKOLÍ BODU



ε okolí bodu a je množina všech bodů x, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε.

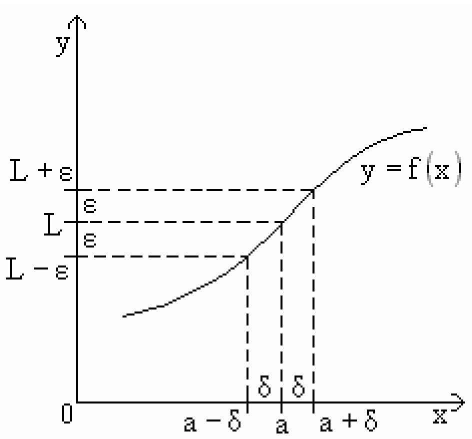
Způsoby zápisů:

$x = \langle a - \varepsilon; a + \varepsilon \rangle$

$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

$|x - a| < \varepsilon$

LIMITA FUNKCE



***Funkce** $y = f(x)$ **je definována v okolí bodu** a.*

***Říká se, že funkce** $y = f(x)$ **má v bodě** a **limitu** L**, jestliže ke každému** ε**-okolí bodu** L **existuje takové** δ**-okolí bodu** a**, že pro každé** x **z** δ**-okolí bodu** a **leží jeho funkční hodnota** $f(x)$ **v** ε**-okolí bodu** L.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R \exists \delta \in R; \forall x \in (a - \delta; a + \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon; L + \varepsilon)$$

Limita a spojitost funkce:

Funkce** $y = f(x)$ **je spojitá v bodě** a **právě tehdy, když je v bodě** a **definována a má limitu rovnu funkční hodnotě.

Pravidla pro počítání s limitami:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L; \lim_{x\to a} g(x) = K$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm K$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot K$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{K}; g(x) \neq 0, K \neq 0$$

$$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot L; c \in R$$

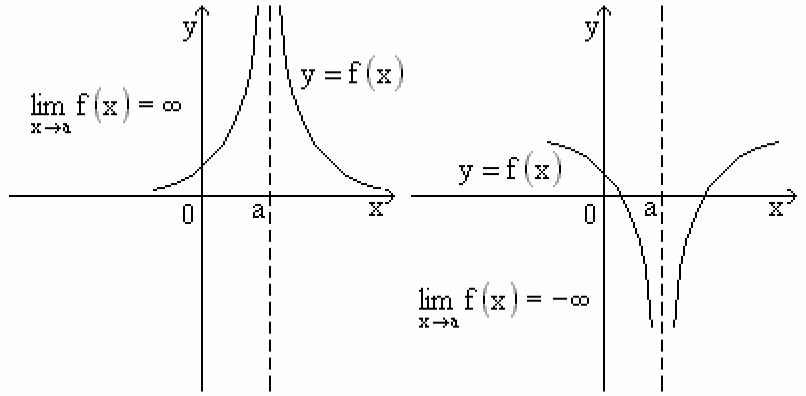
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

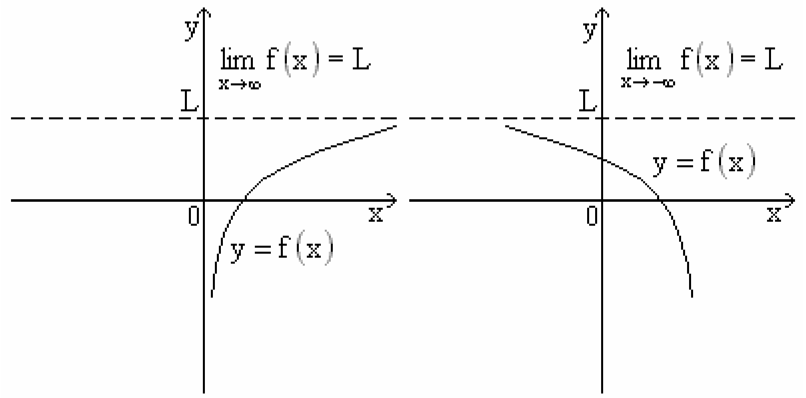
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Nevlastní limity ve vlastních bodech:

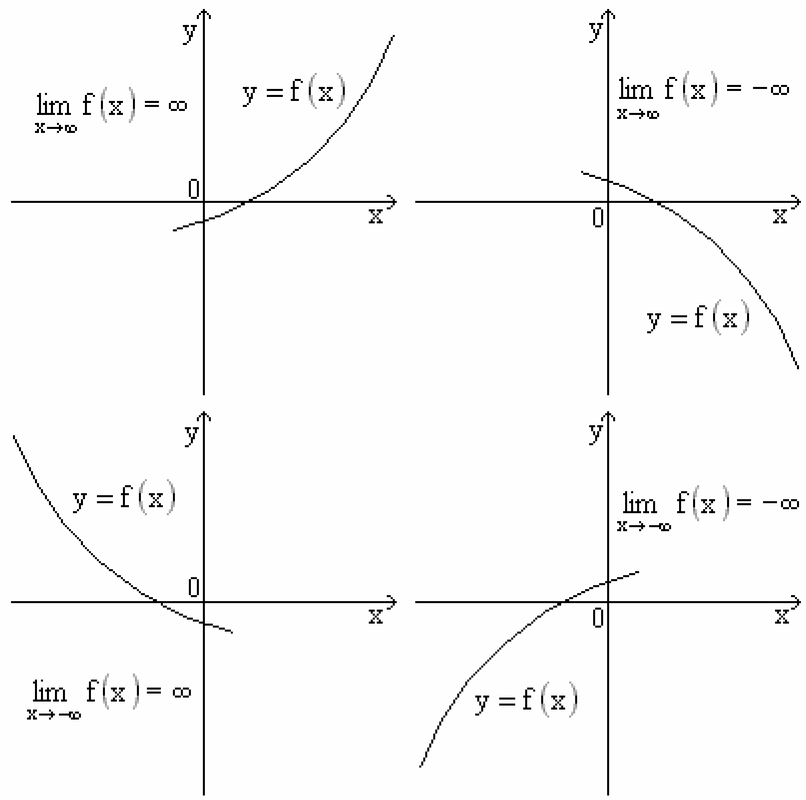


Říká se, že funkce $f(x)$ ***má v bodě*** a ***limitu*** ∞ ***právě tehdy, když ke každému reálnému číslu*** K ***existuje takové*** δ***-okolí bodu*** a***, že pro všechna*** x ***z okolí bodu*** a ***platí, že*** $f(x) > K$.

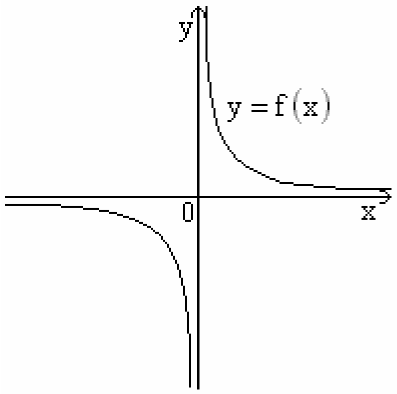
Vlastní limity v nevlastních bodech:



Nevlastní limity v nevlastních bodech:



Jednostranné limity:



$$y=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\nexists$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

Př.:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x+4}=\frac{2^2-3}{2+4}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2-5x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2x^2+3x-5\right)}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x-5}{5}=\frac{2\cdot 0^2+3\cdot 0-5}{5}=\frac{0+0-5}{5}=-\frac{5}{5}=-1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{t^2+t}{3\left(t^2-1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{t(t+1)}{3(t-1)(t+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{t}{3(t-1)}=\frac{-1}{3(-1-1)}=\frac{-1}{3\cdot(-2)}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

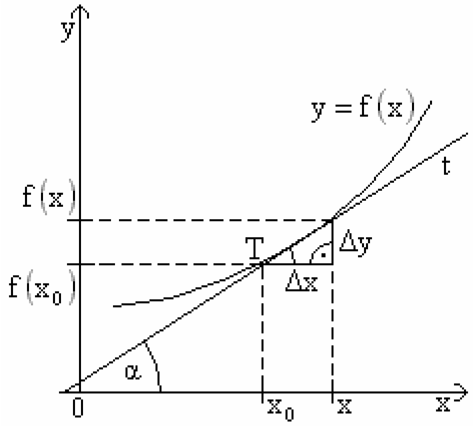
$$=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-x-15}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4\\ \dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3\end{array}\right.\\ x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-15)}}{2\cdot 2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{121}}{4}=\dfrac{1\pm 11}{4}\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{1-11}{4}=\dfrac{-10}{4}=-2{,}5\\ \dfrac{1+11}{4}=\dfrac{12}{4}=3\end{array}\right.\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(x-3)}{2(x+2{,}5)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{2(x+2{,}5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{2x+5}=\frac{3+4}{2\cdot 3+5}=\frac{7}{6+5}=\frac{7}{11}$$

46. Derivace funkce



Nechť je dána funkce $y = f(x)$. ***Jestliže v bodě*** x_0 ***existuje limita*** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$***, pak se říká, že funkce*** $y = f(x)$ ***má v bodě*** x_0 ***derivaci rovnu této limitě.***

Geometrický význam derivace – směrnice tečny v daném bodě $(y = \underline{k}x + q)$.

Značení derivace funkce $y = f(x)$**:**

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Derivace elementárních funkcí:

$y = c$	$y' = 0$	$c \in R$
$y = x$	$y' = 1$	$x \in R$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$x \in R$
$y = x^{-n}$	$y' = -nx^{x-1}$	$x \in R - \{0\}; x \neq 0; n \in N; n \geq 1$
$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$	$x > 0; a \in R - \{0\}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$x \in R; a > 0; a \neq 1$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in R$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0; a > 0; a \neq 1$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in R$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in R$
$y = \mathrm{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z$
$y = \mathrm{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k \cdot \pi; k \in Z$

Pravidla pro počítání s derivacemi:

Násobení konstantou $\quad (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Součet a rozdíl $\quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Součin $\quad f(x) = u; g(x) = v$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Podíl $\quad f(x) = u; g(x) = v$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$$

Př.:

① $$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}; x \neq 0$$

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}; x \neq 0$$

② $$y = \frac{6}{x^3} - 5 = 6x^{-3} - 5$$

$$y' = 6\cdot(-3)x^{-3-1} - 0 = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}; x \neq 0$$

③ $$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x\cdot\sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x\cdot\cos x) - (\sin x\cdot\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x\cdot\sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x - \cos x\cdot\sin x}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Derivace složené funkce:

$y = f[g(x)]$

$g(x) = v$

$y = f(v)$

$y' = f'(v)\cdot v'$

Př.:

① $$y = \sin(3x-1)$$

$$y' = \cos(3x-1)\cdot(3-0) = 3\cos(3x-1)$$

② $$y = \ln(2x+4)$$

$$y' = \frac{1}{2x+4}\cdot(2+0) = \frac{2}{2x+4} = \frac{2}{2(x+2)} = \frac{1}{x+2}; x \neq -2$$

Derivace funkce dané implicitně:

Př.:

①
$$x^2+xy+y^2=0$$
$$2x+y+xy'+2yy'=0$$
$$xy'+2yy'=-2x-y$$
$$y'(x+2y)=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y};x\neq -2y$$

②
$$x^2+y^2-5=0$$
$$2x+2yy'-0=0$$
$$2yy'=-2x$$
$$y'=-\frac{2x}{2y}$$
$$y'=-\frac{x}{y};y\neq 0$$

③
$$y^2-4x=0$$
$$2yy'-4=0$$
$$2yy'=4$$
$$y'=\frac{4}{2y}$$
$$y'=\frac{2}{y};y\neq 0$$

Logaritmická derivace:

Př.:

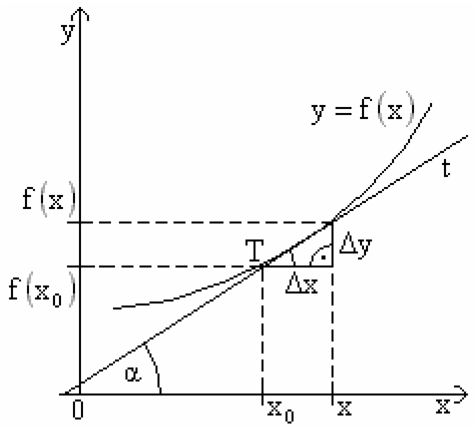
①
$$y=x^{\frac{1}{x}}$$
$$\ln y=\ln x^{\frac{1}{x}}$$
$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$$
$$\ln y=\frac{\ln x}{x}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot y$$
$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}};x>0$$

②
$$y=x^{\sin x}$$
$$\ln y=\ln x^{\sin x}$$
$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$
$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\,\frac{1}{x}$$
$$y'=\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot y$$
$$y'=\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot x^{\sin x};x>0$$

---

47. Fyzikální a geometrický význam derivace

GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVACE



$$y' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Derivace v bodě x_0 je směrnicí tečny v daném bodě.

$y'(x_0) = k = \mathrm{tg}\alpha$

$t: \quad y - y_0 = k(x - x_0)$

$T = [x_0; y_0]$

Př.:

① $k: \quad y = x^2 - 2x$

$T = [1; y_T]$

$y_T: \quad y_T = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$T = [1; -1]$

$k: \quad y = x^2 - 2x$

$y' = 2x - 2$

$y'(x_T) = 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0 = k$

$t: \quad y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - (-1) = 0 \cdot (x - 1)$

$y + 1 = 0$

$y = -1$

FYZIKÁLNÍ VÝZNAM DERIVACE

rychlost .... $v = \frac{ds}{dt} = s'$

zrychlení .... $a = \frac{dv}{dt} = v'$

Př.:

① $m = 10\text{kg}; t = 5\text{s}; E_k = ?$

$s = 1 + t + t^2; E_k = \frac{1}{2} mv^2$

$v = s' = 0 + 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 5 = 11 \, \text{m}/\text{s}$

$E_k = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11^2 = \frac{10 \cdot 121}{2} = \frac{1210}{2} = 605\text{J}$

② $t = 10\text{s}; v = ?$

$s = 2t^3 - 3$

$v = s' = 2 \cdot 3t^2 - 0 = 6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = 600 \, \text{m}/\text{s}$

③ $v = 0 \, \text{m}/\text{s}; t = ?$

$s = \frac{1}{4} t^4 - 4t^3 + 16t^2$

$v = s' = \frac{1}{4} \cdot 4t^3 - 4 \cdot 3t^2 + 16 \cdot 2t = t^3 - 12t^2 + 32t = t(t^2 - 12t + 32)$

$0 = t(t^2 - 12t + 32)$

$t_1 = 0$

$$t_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{array} \right.$$

$t_1 = 0\text{s}; t_2 = 8\text{s}; t_3 = 4\text{s}$

48. Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce se používá následující postup:

1) Určení definičního oboru $D(f)$, průsečíků s osami a spojitosti funkce.

   $D(f)$ … definiční obor – všechna x, pro která má daná funkce smysl

2) Určení sudosti, lichosti funkce.

   sudost .... $f(-x) = f(x)$ .... funkce je souměrná podle osy y

   lichost .... $f(-x) = -f(x)$ .... funkce je souměrná podle počátku soustavy souřadnic

3) Určení stacionárních bodů – bodů podezřelých z extrému.

   $y' = 0$

4) Určení rostoucích, klesajících intervalů funkcí zjištěných pomocí stacionárních bodů.

   → jakýkoli bod z intervalu se dosadí do y': $y' > 0$ .... rostoucí

   $y' < 0$ .... klesající

5) Určení lokálních extrémů podle velikosti y'' ve stacionárních bodech.

   $y''(x_s) > 0$ ..... ve stacionárním bodě je lokální minimum

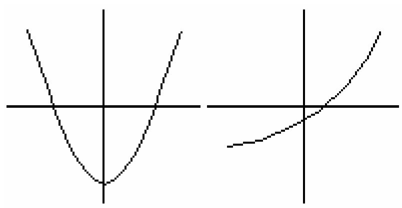
   $y''(x_s) < 0$ ...... ve stacionárním bodě je lokální maximum

6) Určení inflexních bodů, konvexnosti a konkávnosti.

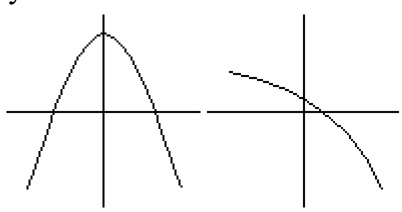
   inflexní bod .... bod, ve kterém se funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak

   $y'' = 0$

   konvexní funkce .... $y'' > 0$



   konkávní funkce .... $y'' < 0$



7) Určení asymptot funkce.

   a) asymptoty rovnoběžné s osou y

      $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, pak přímka $x = x_0$ je asymptota

      x_0 … bod nespojitosti

   b) asymptoty rovnoběžné s osou x

      $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, pak přímka $y = a$ je asymptota

   c) asymptoty směrnicového typu $y = kx + q$

      za podmínky, že $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, platí $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$

8) Načrtnutí grafu funkce do soustavy souřadnic s využitím zjištěných vlastností.

Př.:

$$y=\frac{x^2-2x+1}{1+x^2}$$

1) $D(f)=R$

průsečík s osou x: $y=0\Rightarrow$ $\dfrac{x^2-2x+1}{1+x^2}=0$

$x^2-2x+1=0$

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2\pm0}{2}=1$

$P_1=[1;0]$

průsečík s osou y: $x=0\Rightarrow$ $y=\dfrac{0^2-2\cdot0+1}{1+0^2}=\dfrac{0-0+1}{1+0}=1$

$P_2=[0;1]$

funkce je spojitá

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-2(-x)+1}{1+(-x)^2}=\dfrac{(-1)^2\cdot x^2+2x+1}{1+(-1)^2\cdot x^2}=\dfrac{x^2+2x+1}{1+x^2}$

$f(-x)\neq f(x)$

$f(-x)\neq -f(x)$

funkce není ani sudá, ani lichá

3) $y'=\dfrac{(2x-2+0)(1+x^2)-(x^2-2x+1)(0+2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{(2x-2)(1+x^2)-2x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}=$

$=\dfrac{2x+2x^3-2-2x^2-2x^3+4x^2-2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2x^2-2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$

$y'=0\Rightarrow$ $\dfrac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}=0$

$2(x^2-1)=0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x_{1,2}=\pm1$

$y_{s_1}=\dfrac{(-1)^2-2(-1)+1}{1+(-1)^2}=\dfrac{1+2+1}{1+1}=\dfrac{4}{2}=2$

$S_1=[-1;2]$

$y_{s_2}=\dfrac{1^2-2\cdot1+1}{1+1^2}=\dfrac{1-2+1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$

$S_2=[1;0]$

4)

	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;\infty)$
y'	$y'=\dfrac{2((-2)^2-1)}{(1+(-2)^2)^2}$ $y'=\dfrac{2(4-1)}{(1+4)^2}$ $y'=\dfrac{6}{25}$ $y'>0$ rostoucí	$y'=\dfrac{2(0^2-1)}{(1+0^2)^2}$ $y'=\dfrac{2(0-1)}{(1+0)^2}$ $y'=\dfrac{-2}{1}$ $y'=-2$ $y'<0$ klesající	$y'=\dfrac{2(2^2-1)}{(1+2^2)^2}$ $y'=\dfrac{2(4-1)}{(1+4)^2}$ $y'=\dfrac{6}{25}$ $y'>0$ rostoucí

5) $$y' = \frac{2x^2 - 2}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

$$y'' = \frac{(4x - 0)\left(1 + x^2\right)^2 - \left(2x^2 - 2\right)\cdot 2\left(1 + x^2\right)(0 + 2x)}{\left(1 + x^2\right)^4} = \frac{4x\left(1 + x^2\right)^2 - \left(2x^2 - 2\right)\cdot 4x\left(1 + x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(1 + x^2\right)\left[4x\left(1 + x^2\right) - 4x\left(2x^2 - 2\right)\right]}{\left(1 + x^2\right)^4} = \frac{4x\left(1 + x^2\right) - 4x\left(2x^2 - 2\right)}{\left(1 + x^2\right)^3} = \frac{4x + 4x^3 - 8x^3 + 8x}{\left(1 + x^2\right)^3} = \frac{12x - 4x^3}{\left(1 + x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{4x\left(3 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

$$y''(-1) = \frac{4(-1)\left(3 - (-1)^2\right)}{\left(1 + (-1)^2\right)^3} = \frac{-4(3 - 1)}{(1 + 1)^3} = \frac{-8}{2^3} = -\frac{8}{8} = -1 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}$$

$$y''(1) = \frac{4 \cdot 1\left(3 - 1^2\right)}{\left(1 + 1^2\right)^3} = \frac{4(3 - 1)}{(1 + 1)^3} = \frac{8}{2^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum}$$

6) $$y'' = 0 \Rightarrow \quad \frac{4x\left(3 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^3} = 0$$

$$4x\left(3 - x^2\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \Big| \quad 3 - x_2^2 = 0$$

$$3 = x_2^2$$

$$\pm\sqrt{3} = x_2$$

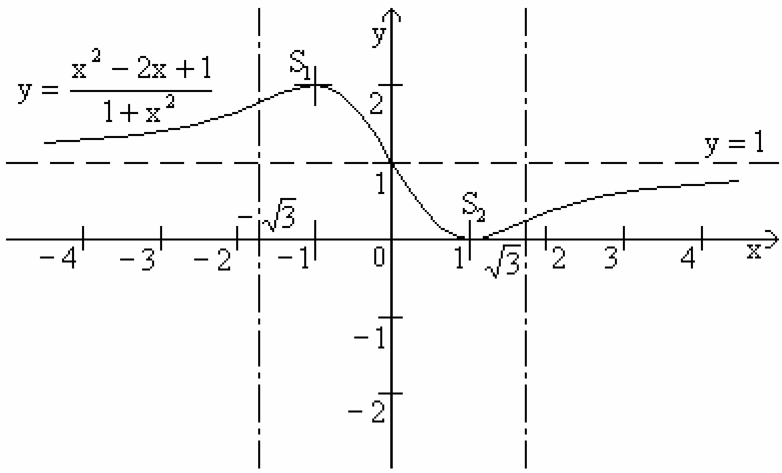
	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}; 0\right)$	$\left(0; \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}; \infty\right)$
y''	$y'' = \frac{4(-2)\left(3 - (-2)^2\right)}{\left(1 + (-2)^2\right)^3}$ $y'' = \frac{-8(3 - 4)}{(1 + 4)^2}$ $y'' = \frac{8}{25}$ $y'' > 0$ konvexní funkce	$y'' = \frac{4(-1)\left(3 - (-1)^2\right)}{\left(1 + (-1)^2\right)^3}$ $y'' = \frac{-4(3 - 1)}{(1 + 1)^2}$ $y'' = \frac{-8}{4}$ $y'' < 0$ konkávní funkce	$y'' = \frac{4 \cdot 1\left(3 - 1^2\right)}{\left(1 + 1^2\right)^3}$ $y'' = \frac{4(3 - 1)}{(1 + 1)^2}$ $y'' = \frac{8}{4}$ $y'' > 0$ konvexní funkce	$y'' = \frac{4 \cdot 2\left(3 - 2^2\right)}{\left(1 + 2^2\right)^3}$ $y'' = \frac{8(3 - 4)}{(1 + 4)^2}$ $y'' = \frac{-8}{25}$ $y'' < 0$ konkávní funkce

7) $$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 1} = 1$$

rovnice asymptoty je $y = 1$

8)



49. Aplikace extrémů funkcí v úlohách

Využití derivací při řešení slovních úloh.

Př.:

① V rovině jsou dány body $A=[0;3]$ a $B=[4;5]$. Jaké musí mít bod M souřadnice, aby ležel na ose x a součet $|AM|+|BM|$ byl minimální?

$M \in x \Rightarrow M=[x;0]$

$y=|AM|+|BM|$

$|AM|=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}$

$|BM|=\sqrt{(x_B-x_M)^2+(y_B-y_M)^2}$

$$y=\sqrt{(0-x)^2+(3-0)^2}+\sqrt{(4-x)^2+(5-0)^2}=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{(4-x)^2+5^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{16-8x+x^2+25}=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{41-8x+x^2}=(x^2+9)^{\frac{1}{2}}+(41-8x+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Derivace funkce:

$$y'=\frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+0)+\frac{1}{2}(x^2-8x+41)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-8+0)=$$
$$=\frac{2x}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x^2-8x+41)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(x-4)=\frac{x}{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2(x-4)}{2(x^2-8x+41)^{-\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+41}}$$

Určení stacionárních bodů:

$y'=0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+41}}=0$$
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=-\left(\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+41}}\right)\quad\Big|^2$$
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}=(-1)^2\cdot\frac{(x-4)^2}{\left(\sqrt{x^2-8x+41}\right)^2}$$
$$\frac{x^2}{x^2+9}=\frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+41}$$
$$x^2(x^2-8x+41)=(x^2-8x+16)(x^2+9)$$
$$x^4-8x^3+41x^2=x^4+9x^2-8x^3-72x+16x^2+144$$
$$x^4-8x^3+41x^2-x^4-9x^2+8x^3+72x-16x^2-144=0$$
$$16x^2+72x-144=0\quad\Big|:4$$

$$2x^2+9x-18=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 2\cdot(-18)}}{2\cdot 2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+144}}{4}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{4}=\frac{-9\pm 15}{4}\left\langle\begin{array}{l}\frac{-9-15}{4}=-\frac{24}{4}=-6\\ \frac{-9+15}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

$$x_1=-6;x_2=\frac{3}{2}$$

Druhá derivace funkce – důkaz minima:

$$y'=x\left(x^2+9\right)^{-\frac{1}{2}}+(x-4)\left(x^2-8x+41\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y''=1\cdot\left(x^2+9\right)^{-\frac{1}{2}}+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+9\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x+0)+(1-0)\left(x^2-8x+41\right)^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+(x-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-8x+41\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x-8+0)=$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2x^2}{2}\cdot\left(x^2+9\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\left(x^2-8x+41\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x-4)(2x-8)}{2}\cdot\left(x^2-8x+41\right)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-8x+41}}-\frac{2(x-4)(x-4)}{2\sqrt{\left(x^2-8x+41\right)^3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{x^2}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-8x+41}}-\frac{(x-4)^2}{\left(x^2-8x+41\right)\cdot\sqrt{\left(x^2-8x+41\right)}}=$$

$$=\frac{\left(x^2+9\right)-x^2}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}+\frac{\left(x^2-8x+41\right)-(x-4)^2}{\left(x^2-8x+41\right)\cdot\sqrt{\left(x^2-8x+41\right)}}=$$

$$=\frac{x^2+9-x^2}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}+\frac{x^2-8x+41-\left(x^2-8x+16\right)}{\left(x^2-8x+41\right)\cdot\sqrt{\left(x^2-8x+41\right)}}=$$

$$=\frac{9}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}+\frac{x^2-8x+41-x^2+8x-16}{\left(x^2-8x+41\right)\cdot\sqrt{\left(x^2-8x+41\right)}}=$$

$$=\frac{9}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}+\frac{25}{\left(x^2-8x+41\right)\cdot\sqrt{\left(x^2-8x+41\right)}}$$

$y''>0$ pro každé $x\Rightarrow x_{1,2}$ jsou lokální minima

Určení velikosti funkčních hodnot stacionárních bodů:

$$y = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{41 - 8x + x^2}$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9} + \sqrt{41 - 8 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{36}{4}} + \sqrt{\frac{164}{4} - \frac{48}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} + \sqrt{\frac{125}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{\frac{25}{4}} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \sqrt{5} \cdot \frac{8}{2} = 4\sqrt{5}$$

$$y(-6) = \sqrt{(-6)^2 + 9} + \sqrt{41 - 8 \cdot (-6) + (-6)^2} = \sqrt{36 + 9} + \sqrt{41 + 48 + 36} = \sqrt{45} + \sqrt{125} =$$

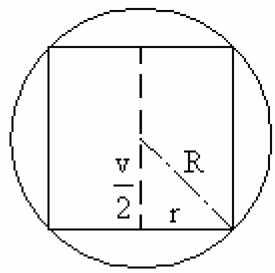
$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = \sqrt{5}(3 + 5) = 8\sqrt{5}$$

Minimálního součtu nabývá funkce v bodě $M = \left[\frac{3}{2}; 0\right]$.

② Jaké budou rozměry rotačního válce o maximálním objemu vepsaného do koule o poloměru R?

objem válce .... $V = \pi r^2 \cdot v$

objem koule .... $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Vztah mezi poloměrem válce a poloměrem koule:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2$$

Funkce pro objem válce:

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{v^2}{4}\right)v = \pi R^2 \cdot v - \pi\frac{v^3}{4}$$

Určení extrémních hodnot z první derivace:

R = konst.

$$V = \pi R^2 \cdot v - \pi\frac{v^3}{4}$$

$$V' = \pi R^2 \cdot 1 - \pi\frac{3v^2}{4} = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi v^2$$

$V' = 0 \Rightarrow$

$$\pi R^2 - \frac{3}{4}\pi v^2 = 0$$

$$\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi v^2 \quad |:\pi$$

$$R^2 = \frac{3}{4}v^2$$

$$\frac{4}{3}R^2 = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}R^2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}R = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

Určení poloměru podstavy válce:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}R}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R \cdot \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{6}R\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{2^2\sqrt{3}^3}{6^2}R^2} = \sqrt{R^2 - \frac{4 \cdot 3}{36}R^2} = \sqrt{R^2 - \frac{12}{36}R^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{3} - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot R =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot R$$

Důkaz extrému pomocí druhé derivace:

$$V' = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi v^2$$

$$V'' = 0 - \frac{3}{4}\pi \cdot 2v = -\frac{6}{4}\pi v = -\frac{3}{2}\pi v$$

$$V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}R\right) = -\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}}{6}R = -\frac{6\sqrt{3}}{12}\pi R = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R$$

$$V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}R\right) < 0$$

jedná se o lokální minimum

50. Neurčitý integrál - metody integrace

NEURČITÝ INTEGRÁL – PRIMITIVNÍ FUNKCE

Je dána funkce f ***definována na intervalu*** (a,b)***. Říká se, že funkce*** F ***je primitivní funkcí*** f ***na intervalu*** (a,b)***, jestliže platí:*** $F'(x)=f(x); \forall x \in (a,b)$.

Libovolná primitivní funkce F ***k funkci*** f ***na intervalu*** (a,b) ***se nazývá neurčitý integrál funkce*** f ***a označuje se*** $\int f(x)dx = F(x)+c$.

Neurčité integrály elementárních funkcí:

$y=x^n$	$y=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in R; n \in N$
$y=c$	$y=cx$	$x \in R; c \in R$
$y=x^n$	$y=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x>0; n \in R; n \neq -1$
$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$	$y=\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$y=\sin x$	$y=-\cos x$	$x \in R$
$y=\cos x$	$y=\sin x$	$x \in R$
$y=\mathrm{tg}x$	$y=-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
$y=\mathrm{cotg}x$	$y=\ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi$
$y=e^x$	$y=e^x$	$x \in R$
$y=a^x$	$y=\frac{a^x}{\ln a}$	$x>0; a>0$
$y=\ln x$	$y=x(\ln x-1)$	$x>0$
$y=\frac{1}{\cos^2 x}$	$y=\mathrm{tg}x$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
$y=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$y=\mathrm{cotg}x$	$x \neq k\pi$

Pravidla pro počítání s integrály:

Násobení konstantou $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$

Součet a rozdíl $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Integrál lineární funkce $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c$

Př.:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int \sqrt[3]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c = x^{\frac{8}{3}} \cdot \frac{3}{8} + c = \frac{3}{8}\sqrt[3]{8}$$

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left(x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{(e^x)^2 - 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + c$$

$$\int 2^{-6} dx = 2^{-6} x + c$$

METODY INTEGRACE

Substituční metoda:

$$\int f\underbrace{(\varphi(x))}_{t} \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{dt} = \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(t)dt$$

Př.:

$$\int (1-x)^5 dx = \begin{bmatrix} 1 - x = t \\ -dx = dt \\ dx = -dt \end{bmatrix} = \int t^5 (-1) dt = -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6} + c = -\frac{1}{6}(1-x)^6 + c$$

$$\int e^x \sqrt{e^x - 1} dx = \begin{bmatrix} e^x - 1 = t \\ e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} \end{bmatrix} = \int e^x \sqrt{t} \frac{dt}{e^x} = \int \sqrt{t} d = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x - 1)^3} + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{bmatrix} = \int t \frac{1}{x} \cdot x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin x \cdot \sin^4 x dx = \int \sin x \cdot \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \sin x \cdot \left(1-\cos^2 x\right)^2 dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{\sin x} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \sin x \cdot \left(1-t^2\right)^2 \cdot (-1)\frac{dt}{\sin x} = -\int \left(1-t^2\right)^4 dt = -\int \left(1-2t^2+t^4\right) dt = -\left(t-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+c-t+2\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c =$$

$$= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{\sin x} \end{bmatrix} = \int \frac{\sin x}{t} \cdot (-1)\frac{dt}{\sin x} = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cos(3x-2) dx = \begin{bmatrix} 3x-2=t \\ 3dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\sin(3x-2) + c$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(8x^3+27\right)^2}} dx = \begin{bmatrix} 8x^3+27=t \\ 8 \cdot 3x^2 dx = dt \\ 24x^2 dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{24x^2} \end{bmatrix} = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{t^2}} \cdot \frac{dt}{24x^2} = \frac{1}{24}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} dt = \frac{1}{24}\int \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} dt = \frac{1}{24}\int t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{24} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{24} \cdot 3\sqrt[3]{t} + c = \frac{3}{24}\sqrt[3]{8x^3+27} + c = \frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + c$$

$$\int \frac{1}{a^{2x-1}} dx = \int a^{-2x+1} dx = \begin{bmatrix} -2x+1=t \\ -2dx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int a^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\int a^t dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^t}{\ln a} + c = -\frac{a^{-2x+1}}{2\ln a} + c$$

$$\int \frac{3x}{1-x^2} dx = \begin{bmatrix} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int \frac{3x}{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{dt}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{3}{t} dt = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t} dt = -\frac{3}{2}\ln|t| + c = -\frac{3}{2}\ln\left|1-x^2\right| + c$$

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} = \int \cos x \cdot e^t \frac{dt}{\cos x} = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \cos x dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^2 \cdot \left(1 - t^2\right) \cdot \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^2 \cdot \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \cos x dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} = \int \left(1 - t^2\right) \cdot \cos x \frac{dt}{\cos x} =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) dt = t - \frac{t^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \begin{bmatrix} e^{2x} + 1 = t \\ e^{2x} dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{e^{2x}} \end{bmatrix} = \int \frac{e^{2x}}{t} \cdot \frac{dt}{e^{2x}} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln\left|e^{2x} + 1\right| + c$$

Metoda „per partes“:

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Př.:

$$\int x \cdot e^x dx = \begin{bmatrix} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix} = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x = x \cdot e^x - \int e^x = x \cdot e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

$$\int x \cdot \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

$$\int x\cdot\cos 3x\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=x & v'=\cos 3x \\ u'=1 & v=\int\cos 3x\,dx=\left[\begin{array}{l}3x=t\\3dx=dt\\dx=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right]=\int\cos t\dfrac{dt}{3}=\dfrac{1}{3}\int\cos t\,dt=\dfrac{1}{3}\sin t+c=\dfrac{1}{3}\sin 3x+c\end{array}\right]=$$

$$\frac{x}{3}\sin 3x-\int 1\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\,dx=\frac{x}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3x\,dx=\left[\begin{array}{l}3x=t\\3dx=dt\\dx=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right]=\frac{x}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin t\frac{dt}{3}=\frac{x}{3}\sin 3x-\frac{1}{9}\int\sin t\,dt=$$

$$=\frac{x}{3}\sin 3x-\frac{1}{9}\cos t+c=\frac{x}{3}\sin 3x-\frac{1}{9}\cos 3x+c$$

51. Určitý integrál - užití

URČITÝ INTEGRÁL

Nechť je funkce $y = f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a; b \rangle$.

Newton-Lebnitzova formule - $I = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Př.:

$$\int_{-1}^{2}(x^2 - x + 5)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 5\cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 5\cdot(-1)\right) =$$

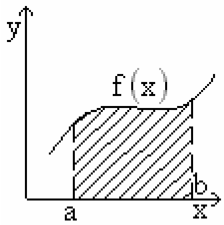
$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 10 - \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - (-5) = \frac{8}{3} - 2 + 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 5 = \frac{16 - 12 + 60 + 2 + 3 + 30}{6} = \frac{99}{6} = \frac{33}{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x - \sin x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2} + \cos 0\right) = \left(\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2} + 0\right) - (0 + 1) =$$

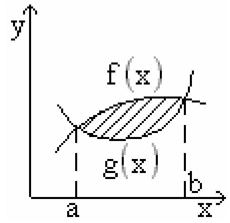
$$= \frac{\pi^2}{8} - 1$$

UŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU

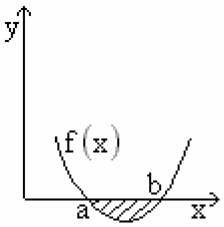
Výpočet obsahu plochy ohraničené křivkami:



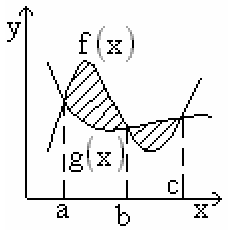
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



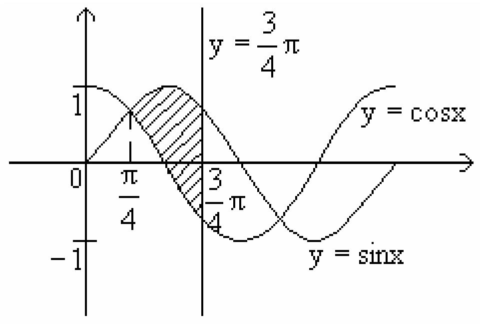
$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_g^c [g(x) - f(x)]dx$$

Postup výpočtu:

1. načrtnutí grafů funkcí do soustavy souřadnic a určení obrazce, jehož plocha se má vypočítat
2. určení horní a dolní meze integrálu jako x-ových souřadnic průsečíků funkcí omezujících plochu
3. sestavení funkce $f(x)$ do určitého integrálu (funkce je dána rozdílem horní a dolní funkce omezujících plochu)
4. výpočet určitého integrálu

Př.:

Jaký bude obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = \sin x$; $y = \cos x$ a $x = \frac{3}{4}\pi$?



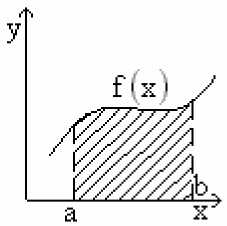
$$\left.\begin{matrix} y = \sin x \\ y = \cos x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y = y \\ \sin x = \cos x \\ \Downarrow \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{matrix}$$

meze: $\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi$

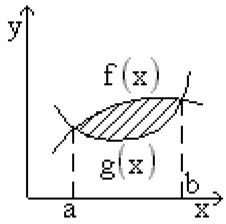
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \left(-\cos\frac{3}{4}\pi - \sin\frac{3}{4}\pi\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\cos\frac{3}{4}\pi - \sin\frac{3}{4}\pi + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Výpočet objemu tělesa rotujícího kolem osy x**:**



$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$$



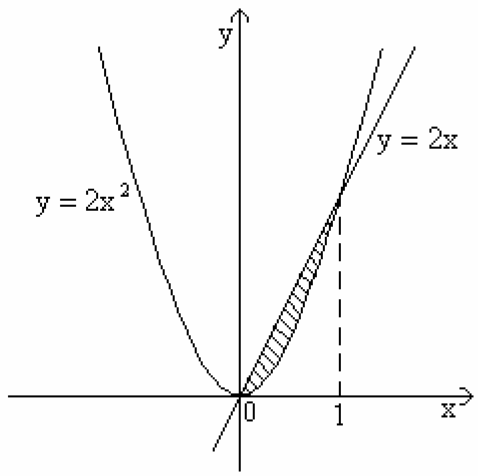
$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$$

Postup výpočtu:

1. načrtnutí grafů funkcí do soustavy souřadnic a určení obrazce rotujícího kolem osy x
2. určení horní a dolní meze integrálu jako x-ových souřadnic průsečíků funkcí omezujících plochu
3. sestavení funkcí určujících nalezený obrazec (je-li obrazec tvořen několika funkcemi, rozděluje se pak na několik jednodušších těles tvořených jednou funkcí)
4. určení objemu vzniklého tělesa jako rozdílu objemů těles vzniklých rotací horní a dolní křivky ohraničující obrazec

Př.:

Jaký bude objem tělesa, které vznikne rotací obrazce kolem osy x ohraničeného křivkami $y = 2x$ a $y = 2x^2$?



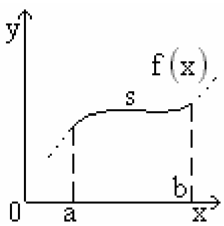
$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ y &= 2x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= y \\ 2x &= 2x^2 \\ 1 &= \frac{2x^2}{2x} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

meze: 0; 1

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left[(2x)^2 - (2x^2)^2\right] dx = \pi \cdot \int_0^1 \left[4x^2 - 4x^4\right] dx = \pi \cdot \left[4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \cdot \left[\left(4\frac{1^3}{3} - 4\frac{1^5}{5}\right) - \left(4\frac{0^3}{3} - 4\frac{0^5}{5}\right)\right] =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5} - 0 - 0\right) = \frac{20 - 12}{15}\pi = \frac{8}{15}\pi$$

Výpočet délky oblouku rovinné křivky:



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

52. Posloupnost – vlastnosti, limita posloupnosti

POSLOUPNOSTI

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel* N *se nazývá nekonečná posloupnost.

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel* $n \leq n_0$*, kde* n_0 *je pevně dané číslo z množiny* N*, se nazývá konečná posloupnost.

Typy zadání posloupností:

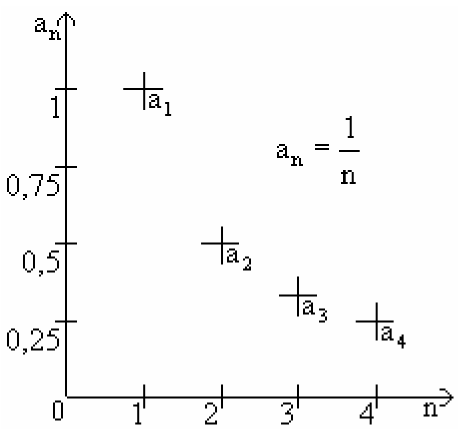
1. **výčtem prvků**
   $2;5;8;11;14;17;20;23;\ldots$
2. **vzorcem pro n-tý člen**
   $a_n = 3n - 1; n \in \mathrm{N}$
   $\{3n-1\}_{n=1}^{\infty}$
3. **rekurentně** – je zadán jeden člen posloupnosti (většinou první) a předpis, jak se z předcházejícího členu dostane následující
   $a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 3$

Př.:

①	$3;4;5;6;7;8;\ldots$	$a_n = n + 2$	$a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 1$
②	$2;6;12;20;\ldots$	$a_n = n(n+1)$	$a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 2n + 2$
③	$\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots$	$a_n = \frac{n}{n+1}$	$a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \frac{n}{a_n(n+2)}$

Graf posloupnosti:

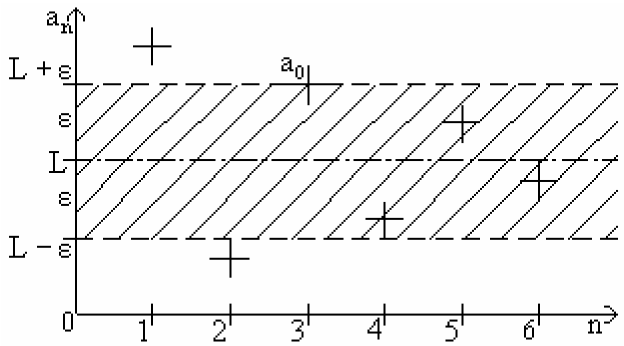
Př.:



Vlastnosti posloupností:

rostoucí	$a_{n+1} > a_n; n \in N$
klesající	$a_{n+1} < a_n; n \in N$
neklesající	$a_{n+1} \geq a_n; n \in N$
nerostoucí	$a_{n+1} \leq a_n; n \in N$
shora omezená	existuje takové reálné číslo h, že $a_n \leq h; n \in N$
zdola omezená	existuje takové reálné číslo d, že $a_n \geq d; n \in N$
omezená	je omezená shora i zdola

LIMITA POSLOUPNOSTI



Říká se, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je konvergentní, právě když existuje reálné číslo*** a ***takové, že platí:***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon_L > 0\, \exists n_0 \in N;$$
$$\forall n \geq n_0 : a_n \in (L-\varepsilon; L+\varepsilon)$$

Posloupnosti, které nejsou konvergentní se nazývají divergentní.

Věty:

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Každá konvergentní posloupnost je omezená.
3. Nechť posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ mají limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$
$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a; c \in R$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}; b_n \neq 0, b \neq 0$$

4. Každá geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro jejíž kvocient platí, že $|q| < 1; q \in (-1;1)$ má limitu rovnu 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Př.:

$$\left\{\frac{5}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \frac{1}{n} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5 \cdot 0 = 0$$

53. Aritmetická posloupnost

***Posloupnost** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **se nazývá aritmetická právě tehdy, když existuje takové reálné číslo** d**, že pro všechna přirozená čísla** n **platí:** $a_{n+1} = a_n + d$.*

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_r = a_s + (r-s)d$$
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

d … diference aritmetické posloupnosti
s_n … součet prvních n-členů posloupnosti

Př.:

① Jaké hodnoty bude mít prvních 6 členů aritmetické posloupnosti?

$a_1 = -1; d = 3$

$$a_1 = -1$$
$$a_2 = -1 + (2-1)\cdot 3 = -1 + 3 = 2$$
$$a_3 = -1 + (3-1)\cdot 3 = -1 + 6 = 5$$
$$a_4 = -1 + (4-1)\cdot 3 = -1 + 9 = 8$$
$$a_5 = -1 + (5-1)\cdot 3 = -1 + 12 = 11$$
$$a_6 = -1 + (6-1)\cdot 3 = -1 + 15 = 14$$

② Jaký bude 1. člen a diference posloupnosti?

$$a_2 + a_6 = 32$$
$$a_4 + a_5 = 36$$

$$a_1 + d + a_1 + 5d = 32$$
$$a_1 + 3d + a_1 + 4d = 36$$

$$2a_1 + 6d = 32 \Rightarrow a_1 = \frac{32-6d}{2} = 16 - 3d$$
$$2a_1 + 7d = 36$$

$$2(16-3d) + 7d = 36$$
$$32 - 6d + 7d = 36$$
$$d = 36 - 32$$
$$d = 4$$

$$a_1 = 16 - 3\cdot 4 = 16 - 12 = 4$$

54. Geometrická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***se nazývá geometrická právě tehdy, když existuje takové reálné číslo*** q***, že pro všechna přirozená čísla*** n ***platí:*** $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q … kvocient geometrické posloupnosti
s_n … součet prvních n-členů posloupnosti

Př.:
Jaké hodnoty bude mít prvních 5 členů geometrické posloupnosti?

$$a_1 = -4; q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = -4$$

$$a_2 = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = (-4) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$a_3 = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = (-4) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$a_4 = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = (-4) \cdot \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = (-4) \cdot \frac{1}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

55. Nekonečná geometrická řada

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Výraz, který obsahuje její členy a má tvar $a_1+a_2+a_3+\dots$ se nazývá nekonečná řada. Členy $a_1+a_2+a_3+\dots$ se nazývají členy nekonečné řady.

Jestliže je daná posloupnost geometrická, pak se příslušná řada nazývá nekonečná geometrická řada: $a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\dots$

Nekonečná geometrická řada je konvergentní právě tehdy, jestliže $|q|<1$. V opačném případě je řada divergentní.

Je-li nekonečná geometrická řada konvergentní, pak lze sečíst a součet je dán vztahem $s=\dfrac{a_1}{1-q}$.

Př.:

Jestliže je daná geometrická řada konvergentní, jaký bude její součet?

① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

$$a_2=a_1\cdot q\Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\Rightarrow q\in(-1;1)$$

daná geometrická řada je konvergentní

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=1\cdot\frac{2}{1}=2$$

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

$$a_2=a_1\cdot q\Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{-1}=-1\Rightarrow q\in(-1;1)$$

daná geometrická řada je divergentní

56. Variace, permutace, kombinace

FAKTORIÁL ČÍSLA

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Př.:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2! \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 120$

$\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{1 \cdot 4 - 1}{4!} = \frac{3}{4!} = \frac{3}{4 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{1}{4 \cdot 2!} = \frac{1}{8}$

$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56$

$\frac{n!}{n(n-1)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)!}{(2n-1)!} = 2n(2n+1)$

KOMBINATORIKA

Variace bez opakování:

Variace** k**-té třídy z** n **prvků je uspořádaná** k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutace bez opakování:

Permutace z** n **prvků je každá variace** n**-té třídy z těchto prvků bez opakování.

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Kombinace bez opakování:

Kombinace** k**-té třídy z** n **prvků bez opakování je neuspořádaná** k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýce jednou.

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Př.:

① Kolika způsoby lze na šachovnici 8x8 vybrat:

a) trojici políček
b) trojici políček neležících v témže sloupci
c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě
d) trojici políček, která nejsou všechna téže barvy

a) $C_3(8\cdot 8)=C_3(64)=\dfrac{64!}{3!(64-3)!}=\dfrac{64!}{3!\cdot 61!}=41664$

b) $8\cdot C_3(8)=8\cdot\dfrac{8!}{3!(8-3)!}=8\cdot\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=8\cdot 56=448$

existuje 448 trojic políček, která leží v témže sloupci

$41664-448=41216$

c) $2\cdot 8\cdot C_3(8)=16\cdot\dfrac{8!}{3!(8-3)!}=16\cdot\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=16\cdot 56=896$

existuje 896 trojic políček, která neleží v témže sloupci ani v téže řadě

$41664-896=40768$

d) $2\cdot C_3(32)=2\cdot\dfrac{32!}{3!(32-3)!}=2\cdot\dfrac{32!}{3!\cdot 29!}=2\cdot 4960=9920$

existuje 9920 trojic políček, která jsou všehna bílá nebo všechna černá

$41664-9920=31744$

② Kolika způsoby je možno ze 7 mužů a 4 žen vybrat 6-člennou skupinu, v níž jsou právě 2 ženy?

$$C_4(7)\cdot C_2(4)=\frac{7!}{4!(7-4)!}\cdot\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=210$$

③ K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici barvy bílá, červená, zelená, modrá a žlutá.

a) Kolik vlajek se může z těchto barev sestavit?
b) Kolik vlajek sestavených z těchto barev má modrý pruh uprostřed?

Záleží na pořadí barev.

a) $V_3(5)=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=60$

b) S modrým pruhem uprostřed se vybírá pouze ze 4 barev pro dva pruhy.

$V_2(4)=\dfrac{4!}{(4-2)!}=\dfrac{4!}{2!}=12$

④ Kolik různých přirozených čísel lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry v čísle neopakují?

$P(5)=5!=120$

Variace s opakováním:

Variace k***-té třídy z*** n ***prvků s opakováním je uspořádaná*** k***-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše*** k***-krát.***

$$V'_k(n) = n^k$$

Permutace s opakováním:

Permutace s opakováním z n ***prvků je k-tice uspořádaná z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.***

$$P'(k_1; k_2; k_3; \ldots k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Kombinace s opakováním:

Kombinace k***-té třídy z*** n ***prvků s opakování je každá neuspořádaná*** k***-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše*** k***-krát.***

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Př.:

① Kolik přirozených čtyřciferných čísel je možné sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

a) Kolik z nich bude sudých?
b) Kolik z nich bude lichých?

$V'_4(7) = 7^4 = 2401$

a) Sudá čísla mohou mít na konci pouze 2, 4 a 6, takže se počítají možnosti jen pro první 3 místa a výsledný počet se násobí 3.
$3 \cdot V'_3(7) = 3 \cdot 7^3 = 1029$

b) Lichá čísla mohou mít na konci pouze 1, 3, 5 a 7, takže se počítají možnosti jen pro první 3 místa a výsledný počet se násobí 4.
$4 \cdot V'_3(7) = 4 \cdot 7^3 = 1372$

② Kolik přirozených pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 5 a 7, má-li být v každém z nich číslo 5:
a) 3-krát
b) nejvýše 3-krát
c) alespoň 3-krát

a) 3x…5, 2x…7 $\Rightarrow P'(3;2)=\frac{(3+2)!}{3!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

b) 3x…5, 2x…7 $\Rightarrow P'(3;2)=\frac{(3+2)!}{3!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

2x…5, 3x…7 $\Rightarrow P'(2;3)=\frac{(2+3)!}{2!\cdot 3!}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

1x…5, 4x…7 $\Rightarrow P'(1;4)=\frac{(1+4)!}{1!\cdot 4!}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}=5$

0x…5, 5x…7 $\Rightarrow P'(0;5)=\frac{(0+5)!}{0!\cdot 5!}=\frac{5!}{0!\cdot 5!}=1$

Čísel lze sestavit 26 (součet všech výsledných hodnot).

c) 3x…5, 2x…7 $\Rightarrow P'(3;2)=\frac{(3+2)!}{3!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

4x…5, 1x…7 $\Rightarrow P'(4;1)=\frac{(4+1)!}{4!\cdot 1!}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}=5$

5x…5, 0x…7 $\Rightarrow P'(5;0)=\frac{(5+0)!}{5!\cdot 0!}=\frac{5!}{5!\cdot 0!}=1$

Čísel lze sestavit 16 (součet všech výsledných hodnot).

③ Jaký je počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti?

$$C'_3(10)=\binom{10+3-1}{3}=\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!(10-1)!}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=220$$

57. Kombinační číslo – vlastnosti, rovnice s kombinačními čísly

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vlastnosti a hodnoty kombinačních čísel:

$\binom{n}{1} = n$ $\quad\binom{n}{n} = 1$ $\quad\binom{n}{0} = 1$

$\binom{0}{0} = 1$ $\quad\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\quad\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Př.:

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$$

$$\binom{12}{3} + \binom{12}{8} = \binom{12}{9} + \binom{12}{8} = \binom{13}{9}$$

$$\binom{50}{4} + \binom{50}{45} = \binom{50}{46} + \binom{50}{45} = \binom{51}{46} = \binom{51}{5}$$

$$\binom{41}{6} + \binom{40}{7} + \binom{40}{34} = \binom{41}{6} + \binom{40}{33} + \binom{40}{34} = \binom{41}{6} + \binom{41}{34} = \binom{41}{35} + \binom{41}{34} = \binom{42}{35} = \binom{42}{7}$$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

1. řádek	$n = 0$	$\binom{0}{0}$	1
2. řádek	$n = 1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
3. řádek	$n = 2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
4. řádek	$n = 3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$(k+1)$. řádek	$n = k$	$\binom{k}{0}\ \binom{k}{1}\ \binom{k}{2}\ \cdots\ \binom{k}{k-1}\ \binom{k}{k}$	

BINOMICKÁ VĚTA

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}\cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot a^0 \cdot b^n$$

Př.:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}\cdot a^4 \cdot b^0 + \binom{4}{1}\cdot a^3 \cdot b^1 + \binom{4}{2}\cdot a^2 \cdot b^2 + \binom{4}{3}\cdot a^1 \cdot b^3 + \binom{4}{4}\cdot a^0 \cdot b^4 =$$

$$= 1\cdot a^4 \cdot 1 + 4\cdot a^3 \cdot b^1 + 6\cdot a^2 \cdot b^2 + 4\cdot a^1 \cdot b^3 + 1\cdot 1\cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(1-m)^7 = \binom{7}{0}\cdot 1^7 \cdot (-m)^0 + \binom{7}{1}\cdot 1^6 \cdot (-m)^1 + \binom{7}{2}\cdot 1^5 \cdot (-m)^2 + \binom{7}{3}\cdot 1^4 \cdot (-m)^3 + \binom{7}{4}\cdot 1^3 \cdot (-m)^4 +$$

$$+ \binom{7}{5}\cdot 1^2 \cdot (-m)^5 + \binom{7}{6}\cdot 1^1 \cdot (-m)^6 + \binom{7}{7}\cdot 1^0 \cdot (-m)^7 = 1\cdot 1\cdot 1 + 7\cdot 1\cdot (-m) + 21\cdot 1\cdot m^2 + 35\cdot 1\cdot (-m^3) +$$

$$+ 35\cdot 1\cdot m^4 + 21\cdot 1\cdot (-m^5) + 7\cdot 1\cdot m^6 + 1\cdot 1\cdot (-m^7) = 1 - 7m + 21m^2 - 35m^3 + 35m^4 - 21m^5 + 7m^6 - m^7$$

---

58. Pravděpodobnost

NÁHODNÉ POKUSY

Výsledky náhodných pokusů závisí nejen na předepsaných podmínkách, ale také na náhodě.

Množina možných výsledků pokusů:

Ω Předpokládá se, že u každého náhodného pokusu je možno předem určit všechny možné výsledky, které se navzájem vylučují (nastane jeden, nemůže nastat druhý) a že jeden z nich nastane vždy.

Náhodné jevy:

Jev je podmnožinou množiny možných výsledků pokusů.

Náhodný jev – výsledek náhodného pokusu
Elementární jev – výsledek pokusu, který nelze v dané situaci dále rozdělit
Nemožný jev ($\emptyset$)– jev, který nikdy nenastane
Jistý jev (Ω)– jev, který nastane vždy

Vztahy mezi jevy:

$\omega \in A$	výsledek ω je příznivý jevu A
$A \subset B$	jev A je podjevem jevu B
$A = B$	jevy A a B jsou si rovny $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
$A \bigcup B$	nastává právě tehdy, nastane-li alespoň jeden z jevů A, B a nazývá se sjednocení jevů A, B
$A \bigcap B$	nastává právě tehdy, nastanou-li oba jevy A, B – průnik jevů A, B
$A \bigcap B = \emptyset$	jevy A, B se navzájem vylučují (neslučitelné, disjunktní jevy)
A'	nastává, jestliže jev A nenastane (jev opačný k jevu A – doplňkový)

PRAVDĚPODOBNOST NÁHODNÉHO JEVU

Pokud jde o takový náhodný pokus, u něhož jsou výsledky stejně možné, je jich konečný počet a vzájemně se vylučují, potom se číselná hodnota pravděpodobnosti jevu** A **určí podle vzorce** $P(A) = \frac{m}{n}$, **kde** m **je počet všech příznivých výsledků jevu** A **a** n **je počet všech možných výsledků.

Př.:

V loterii je 5000 losů, z nichž 100 je vítězných. Jaká je pravděpodobnost, že zakoupený los je vítězný?

$$P(A) = \frac{100}{5000} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \Rightarrow 2\%$$

STATISTICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

Je založena na relativní četnosti.

Relativní četnost $p(A)$ - podíl počtu pokusů, ve kterých jev A nastal a celkového počtu provedených pokusů.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n}$$

$n(A)$ .... absolutní četnost
n .... počet náhodných pokusů

Př.:

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet roven 5?

Existují 4 příznivé možnosti, kdy 2 kostky dají součet 5. Počet všech možných výsledků se určí použitím variace s opakováním.

$$p(A) = \frac{4}{V_2'(6)} = \frac{4}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \Rightarrow 11\%$$

PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST A PRAVDĚPODOBNOST PRŮNIKU

Dva jevy jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost jednoho jevu nezávisí na nastoupení jevu druhého.

$$P(A) = P(A/B)$$
$$P(B) = P(B/A)$$

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pravděpodobnost průniku:

závislé jevy .... $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$
nezávislé jevy .... $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Př.:

Pravděpodobnost, že hráč vytáhne z balíčku 32 karet eso je $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Je-li tažená karta eso a vytáhne-li hráč další kartu, pak pravděpodobnost, že tažená karta je opět eso je $P(B/A) = \frac{3}{31}$. Vytáhne-li hráč z uvedeného balíčku karet dvě karty, pak pravděpodobnost, že to budou dvě esa je $P = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} = 0{,}012 \Rightarrow 1{,}2\%$.

PRAVDĚPODOBNOST SJEDNOCENÍ

A, B – disjunktní jevy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A, B – nejsou disjunktní jevy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Př.:

① A – na kostce padne sudé číslo
B – na kostce padne liché číslo

Jevy se navzájem vylučují.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

② A – na kostce padne sudé číslo
B – na kostce padne číslo 6

Jevy se navzájem nevylučují, protože 6 je sudé číslo.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{1}{6}$$

BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI (BERNOULLIHO SCHÉMA, NEZÁVISLÉ POKUSY)

Náhodné pokusy jsou považovány za nezávislé, jestliže pravděpodobnost výsledku kteréhokoli pokusu nezávisí na výsledcích ostatních pokusů.

Bernoulliho vzorec:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$P(A) = p$ ....jev nastane
$P(\overline{A}) = q$ ....jev nenastane
n ....počet pokusů
x ....počet pokusů, při kterých jev nastane

Př.:

Jaká je pravděpodobnost, že při opakování 5 hodů hrací kostkou za sebou padne šestka právě třikrát?

Protože pravděpodobnost jevu A: „padne šestka“ je stále stejná: $p = \frac{1}{6}$, může se dosadit do Bernoulliho vzorce

$$n = 5, k = 3: \; P(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} = 0{,}03215\,.$$

59. Statistika

Statistika zkoumá společenské, přírodní a technické jevy vždy na dostatečně velkém souboru případů (hledá ty vlastnosti, které se projevují teprve v souboru případů, ne jednotlivě).

Statistický soubor – množina osob, věcí, událostí, časových období apod. Jeho prvky nazýváme statistické jednotky.
Rozsah statistického souboru (n**)** – počet jednotek v souboru.

Statistické jednotky se vždy vyšetřují z hlediska zvoleného znaku. U každé jednotky se zjišťují a zaznamenávají hodnoty znaku (hodnoty znaku jsou navzájem neslučitelné).

Znaky:
kvantitativní – jejich hodnoty se liší číselnou velikostí (výška postavy)
kvalitativní

Tabulka rozdělení četnosti:

Četnost hodnoty znaku (n_i **)** – udává, kolikrát se hodnota znaku vyskytuje v celém souboru

Relativní četnost – $\frac{n_i}{n}$

Př.:
Tabulka známek ze čtvrtletní práce.

	známka	četnost - n_i	relativní četnost
$n_1 = 6$	1	6	0,3529
$n_2 = 7$	2	7	0,4118
$n_3 = 3$	3	3	0,1765
$n_4 = 1$	4	1	0,0588
$n_5 = 0$	5	0	0,0000
	celkově	17	1,0000

Znaky se také mohou zadat pomocí intervalů. Potom se jako konkrétní údaj pro další výpočty berou středy jednotlivých intervalů.

Vhodný počet intervalů určuje **Sturgesovo pravidlo**: $k = 1 + 3{,}3\log n$

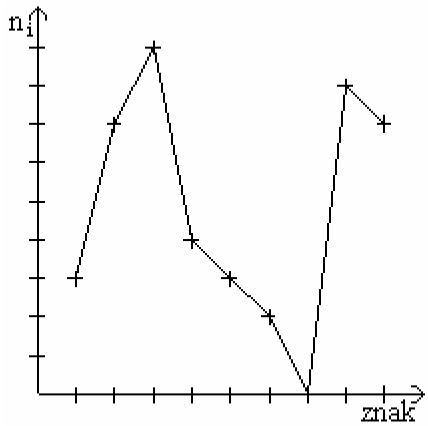
Př.:
Tabulka udávající výšku postavy.

výška	střed intervalu	četnost - n_i
173 – 177	175	5
178 – 182	180	6
183 – 187	185	3
188 – 192	190	3
	celkově	17

GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ ROZDĚLENÍ ČETNOSTÍ

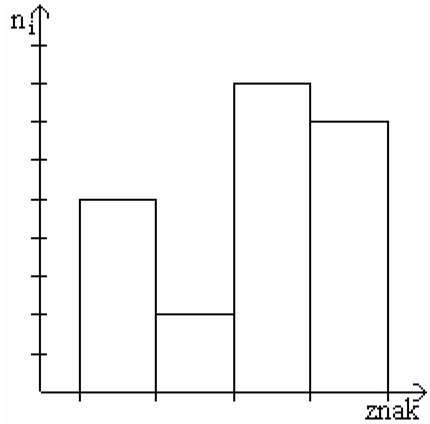
Spojnicový diagram (polygon četností):

Získává se spojením bodů, jejichž 1. souřadnice je hodnota znaku a 2. souřadnice je odpovídající četnost.



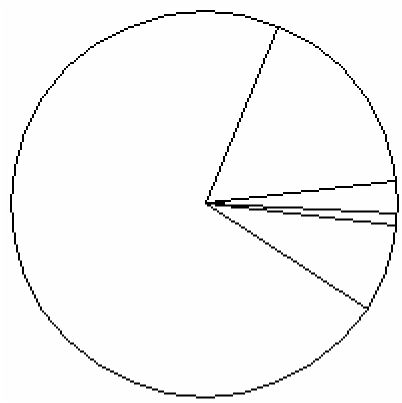
Sloupkový diagram (histogram):

Používá se nejčastěji, jsou-li hodnoty znaku zadány pomocí intervalů. Tyto intervaly tvoří základny sloupků a četnosti udávají výšku.



Kruhový diagram:

Znázorňuje se jím rozdělení četnosti kvalitativního znaku, kde různým hodnotám znaku odpovídají kruhové výseče, jejichž plošné obsahy jsou úměrné četnostem.



CHARAKTERISTIKA POLOHY

Nejstručnější informace o daném souboru. Udává jediné číslo, které charakterizuje polohu znaku na číselné ose.

Aritmetický průměr $\bar{x}$:

prostý tvar

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

vážený tvar
(pro soubor, který je zadán tabulkou rozdělení četností)

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \cdots + x_r \cdot n_r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i \cdot n_i}{n}$$

Harmonický průměr $\overline{x_h}$:

Používá se, jsou-li hodnoty znaku nerovnoměrně rozloženy kolem aritmetického průměru, nebo když jsou hodnoty extrémě nízké či vysoké.

Harmonický průměr z nenulových hodnot statistického souboru je definován jako podíl rozsahu souboru a součtu převrácených hodnot znaků.

prostý tvar

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

vážený tvar
(pro soubor, který je zadán tabulkou rozdělení četností)

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{x_i}}$$

Geometrický průměr $\overline{x_g}$:

prostý tvar

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

vážený tvar
(pro soubor, který je zadán tabulkou rozdělení četností)

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \cdots \cdot x_r^{n_r}}$$

Modus znaku $\mathrm{mod}(x)$:

Je to hodnota znaku x s největší četností.

Medián znaku $\mathrm{med}(x)$:

Je to prostřední hodnota znaku, jsou-li hodnoty uspořádány podle velikosti.

n je liché číslo $\Rightarrow \mathrm{med}(x) = x_{\frac{n+1}{2}}$

n je sudé číslo $\Rightarrow \mathrm{med}(x) = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

CHARAKTERISTIKA VARIABILITY

Průměrná čtvercová odchylka od aritmetického průměru – rozptyl s_x^2 :

prostý tvar

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

vážený tvar
(pro soubor, který je zadán tabulkou rozdělení četností)

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot n_i}{n}$$

Průměrná absolutní odchylka $\overline{d}$:

prostý tvar

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - \overline{x}\right|}{n}$$

vážený tvar
(pro soubor, který je zadán tabulkou rozdělení četností)

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \left|x_i - \overline{x}\right| \cdot n_i}{n}$$

Směrodatná odchylka s_x :

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

Variační koeficient v_x :

Je to podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru a používá se pro srovnání variability dvou nebo více souborů v různých měřících jednotkách nebo v různých úrovních.

$$v_x = \frac{s_x}{\overline{x}}$$

Variační rozpětí R:

Doplňková charakteristika variability.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Př.:

Při měření výšky 100 stromků byly zjištěny tyto hodnoty: 130, 132, 137, 139, 139, 139, 142, 143, 146, 146, 147, 147, 148, 149, 150, 150, 150, 153, 153, 156, 157, 158, 159, 159, 159, 159, 162, 162, 164, 166, 166, 166, 167, 169, 169, 169, 169, 170, 170, 171, 172, 172, 172, 173, 173, 174, 175, 176, 176, 176, 177, 177, 178, 179, 180, 180, 181, 181, 181, 182, 183, 184, 184, 185, 186, 187, 187, 187, 190, 192, 192, 193, 194, 194, 194, 195, 195, 195, 196, 197, 198, 198, 200, 201, 201, 201, 202, 202, 203, 204, 206, 206, 209, 209, 209, 214, 216, 219, 219, 219.

$n = 100$

$k = 1 + 3{,}3\log 100 = 7{,}6 \cong 8$

výška $\approx x_i$	n_i	relativní četnost	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
$128-139 \approx 133{,}5$	6	0,06	$-42{,}84$	42,84	1835,27
$140-151 \approx 145{,}5$	11	0,11	$-30{,}84$	30,84	951,11
$152-163 \approx 157{,}5$	11	0,11	$-18{,}84$	18,84	354,95
$164-175 \approx 169{,}5$	19	0,19	$-6{,}84$	6,84	46,79
$176-187 \approx 181{,}5$	21	0,21	5,16	5,16	26,63
$188-199 \approx 193{,}5$	14	0,14	17,16	17,16	294,47
$200-211 \approx 205{,}5$	13	0,13	29,16	29,16	850,31
$212-223 \approx 217{,}5$	5	0,05	41,16	41,16	1694,15

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot n_i}{100} = 176{,}34$$

$$\mathrm{mod}(x) = 181{,}5$$

$$\mathrm{med}(x) = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{181{,}5 + 181{,}5}{2} = 181{,}5$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{100} = 504{,}74$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{8} \lvert x_i - \overline{x}\rvert \cdot n_i}{100} = 18{,}67$$

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{504{,}74} = 22{,}47$$

$$v_x = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{22{,}47}{176{,}34} = 0{,}1274$$

$$x_{max} = 223$$

$$x_{min} = 128$$

$$R = x_{max} - x_{min} = 223 - 128 = 95$$

60. Důkazy v matematice

LOGICKÁ VÝSTAVBA MATEMATIKY

Axiony (postuláty) – výchozí matematické výroky, které se prohlásí za pravdivé bez dokazování.
Definice – zavádí nové matematické pojmy pomocí pojmů již definovaných.

Věta:

Pravdivý matematický výrok, který se dá odvodit pomocí logiky na základě axionů, definic a dříve dokázaných vět.

tvar věty: $P \Rightarrow T$
P … předpoklad
T … tvrzení

obměněná věta..... $\neg T \Rightarrow \neg P$
obrácená věta ...... $T \Rightarrow P$ (nemusí být vždy větou)
negace věty........... $P \wedge \neg T$

Kvantifikátory:

$\forall$ … obecný kvantifikátor
$\exists$ … existenční kvantifikátor

Při negaci věty se $\forall$ mění na $\exists$ a naopak.

DŮKAZY MATEMATICKÝCH VĚT

Přímý důkaz:

$P \Rightarrow T$

D! $P \Rightarrow T_1; T_1 \Rightarrow T_2; T_2 \Rightarrow T_3; \ldots T_{n-1} \Rightarrow T_n; T_n \Rightarrow T$

$\forall$ - výrok

1) nalézt výrok A, který platí
2) dokázat $A \Rightarrow V$
3) platí výrok V

Př.:

Úkolem je dokázat, že platí následující výroky.

① Pro všechna $n \in N$ platí, že výraz $n^3 + 2n$ je dělitelný 3.

Všechna přirozená čísla mohou být rozdělena do tří skupin: $3k; 3k+1; 3k+2$.

$n = 3k$ $\quad n^3 + 2n = (3k)^3 + 2 \cdot 3k = 27k^3 + 6k = 3(9k^3 + 2k)$

$n = 3k+1$ $\quad n^3 + 2n = (3k+1)^3 + 2 \cdot (3k+1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 6k + 2 =$
$= 27k^3 + 27k^2 + 15k + 3 = 3(9k^3 + 9k^2 + 3k + 1)$

$n = 3k+2$ $\quad n^3 + 2n = (3k+2)^3 + 2 \cdot (3k+2) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 + 6k + 4 =$
$= 27k^3 + 54k^2 + 42k + 12 = 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 4)$

② Součin dvou za sebou jdoucích čísel je dělitelný 2.

Součin dvou za sebou jdoucích čísel: $n(n+1)$
Všechna přirozená čísla mohou být rozdělena do dvou skupin: $2k; 2k+1$.

$n = 2k$ $\quad n(n+1) = 2k(2k+1) = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$

$n = 2k+1$ $\quad n(n+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2) =$
$= 4k^2 + 4k + 2k + 2 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$

Nepřímý důkaz:

Místo věty v podmínkovém tvaru $P \Rightarrow T$ se přímo dokáže věta obměněná.

Př.:

Úkolem je nepřímo dokázat, že platí následující výroky.

① Jestliže $n^2 + 1$ je dělitelné 5, pak n není dělitelné 5.

Věta obměněná: Jestliže n je dělitelné 5, pak $n^2 + 1$ není dělitelné 5.

$n = 5k$ $\quad n^2 + 1 = (5k)^2 + 1 = 25k^2 + 1 = 5(5k^2) + 1$

výraz není dělitelný 5

② Jestliže n^2 je sudé, pak n je sudé.

Věta obměněná: Jestliže n je liché, pak n^2 je liché.

$n = 2k+1$ $\quad n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

výraz je lichý

Důkaz sporem:

Předpokládá se, že daná věta $P \Rightarrow T$ neplatí, a tudíž platí její negace: $\neg(P \Rightarrow T) = P \wedge \neg T$.

$$(P \wedge \neg T) = Z_1; Z_1 \Rightarrow Z_2; \ldots Z_n \Rightarrow Z$$

Př.:

Pro všechna kladná reálná čísla a, b platí: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Negace věty: Pro všechna kladná reálná čísla a, b platí: $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad \Big|^2$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} < ab \quad \Big| \cdot 4$$

$$(a+b)^2 < 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab < 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

$$(a-b)^2 < 0$$

toto není pravda – spor

Důkaz matematickou indukcí:

$$\forall n \in N_a : V(n)$$

I. základ indukce	Věta se dokáže pro první nejmenší prvek dané množiny N_a .
II. indukční krok	Indukční předpoklad – předpokládá se, že věta platí pro přirozené číslo k. Pomocí tohoto indukčního předpokladu se dokáže, že věta platí i pro číslo $(k+1)$.
Závěr	Platí-li věta pro nejmenší přirozené číslo a, pak se ve druhém kroku volí $k = a$ a dokáže se, že to platí i pro $(k+1)$. Opakováním 2. kroku se dokáže, že to platí pro každé n z množiny N_a .

Př.:

$$\forall n \in N: 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

I. $n = 1$

$$1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$

$$1 = \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

II. předpoklad: $n = k$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

D! $n = k+1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k+1}{6}\cdot\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right] = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$$

$$\frac{k+1}{6}\cdot\left(2k^2 + k + 6k + 6\right) = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$$

$$\frac{k+1}{6}\cdot\left(2k^2 + 7k + 6\right) = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$$

$$\left[k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} \left\langle \begin{array}{l} \frac{-7-1}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \\ \frac{-7+1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{array} \right.\right]$$

$$\frac{k+1}{6}\cdot 2(k-k_1)(k-k_2) = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$$

$$\frac{k+1}{6}\cdot(k+2)\cdot 2\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$$

$$\frac{k+1}{6}\cdot(k+2)\cdot(2k+3) = \frac{k+1}{6}\cdot(k+2)(2k+3)$$